Посвящается памяти крупного ученого
в области оптико-электронного
приборостроения, заведующего кафедрой
«Лазерные и оптико-электронные приборы»
доктора технических наук, профессора
Геннадия Михайловича Мосягина

Заслуженный работник высшей школы Российской Федерации,
доктор технических наук, профессор Г.М. Мосягин

Г.М. Мосягин

Теория оптико-электронных систем

Учебное пособие

Под редакцией В.Я. Колючкина

Москва
ИЗДАТЕЛЬСТВО
МГТУ им. Н.Э. Баумана
2020

УДК 621.383:681.7.01
ББК 32.854
М81

Издание доступно в электронном виде по адресу
https://bmstu.press/catalog/item/6368/

Мосягин, Г. М.

М81 Теория оптико-электронных систем : учебное пособие / Г. М. Мосягин ; под ред. В. Я. Колючкина. — Москва : Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2020. — 348, [4] с. : ил.

ISBN 978-5-7038-5260-6

Настоящее пособие подготовлено к изданию на основе конспекта лекций профессора Г.М. Мосягина по дисциплине «Теория оптико-электронных систем», которые он читал студентам кафедры «Лазерные и оптико-электронные системы» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Целью дисциплины является эффективное освоение методов математического моделирования оптико-электронных приборов, используемых при выполнении базовых проектных процедур анализа и параметрической оптимизации.

Для студентов оптических специальностей, а также инженеров, занимающихся разработкой оптико-электронных приборов различного назначения.

УДК 621.383:681.7.01
ББК 32.854

ISBN 978-5-7038-5260-6

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2020
© Оформление. Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2020

ПРЕДИСЛОВИЕ НАУЧНОГО РЕДАКТОРА

Геннадий Михайлович Мосягин — выдающийся ученый в области оптико-электронного приборостроения, д-р техн. наук, профессор кафедры «Лазерные и оптико-электронные системы» МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Г. М. Мосягин родился в 1932 г. В 1956 г. с отличием окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана, в 1959 г. — факультет усовершенствования инженеров Всесоюзного заочного энергетического института при Московском энергетическом институте по специальности «Автоматика и телемеханика». С 1956 г. работал инженером в НПО «Геофизика». В 1961 г. поступил в аспирантуру МВТУ им. Н.Э. Баумана и после ее окончания в 1964 г. защитил кандидатскую диссертацию, в 1986 г. — докторскую. Работал на кафедре «Оптико-электронные приборы» в должности ведущего инженера, ассистента, старшего преподавателя, доцента, профессора, заведующего кафедрой (1988–2000).

Заведуя кафедрой, Г.М. Мосягин внес значительный вклад в развитие кафедры. По его инициативе была открыта новая специальность «Лазерная техника и лазерные технологии», и даже в это сложное для нашей страны время на кафедре продолжались научные работы по перспективным направлениям в области оптико-электронного приборостроения.

Г.М. Мосягин является создателем научной школы по теоретическим основам оптико-электронных систем и методам их автоматизированного контроля. Он подготовил более 20 кандидатов и докторов технических наук. Написанные им научные труды, учебники и учебные пособия стали основой для подготовки студентов оптических специальностей в вузах нашей страны. В настоящее время дисциплина «Теория оптико-электронных систем» входит в базовую часть учебных программ подготовки инженеров по специальности «Электронные и оптико-электронные приборы специального назначения», а также бакалавров по направлениям подготовки «Оптотехника» и «Лазерная техника и лазерные технологии».

Первую версию курса лекций по дисциплине «Теория оптико-электронных систем» Г.М. Мосягин прочитал студентам кафедры «Оптико-электронные приборы» МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1971 г. В основу разработанного в те годы конспекта лекций были положены работы Э. О'Нейла «Введение в статистическую оптику», А. Марешаля и М. Франсона «Структура оптического изображения», М. Борна и Э. Вольфа «Основы оптики», Дж. Гудмена «Введение в фурье-оптику», В.Л. Левшина «Пространственная фильтрация в оптических системах пеленгации». Некоторые из разделов курса лекций разработаны лично Г.М. Мосягиным на основе результатов научных исследований, проводимых под его руководством.

Предлагаемое учебное пособие по дисциплине «Теория оптико-электронных систем», в отличие от учебника, опубликованного в 1990 г., подготовлено на основе авторских материалов конспекта лекций Г.М. Мосягина, которые он читал вплоть до октября 2011 г.

В подготовке материалов данного учебного пособия принимали участие кандидаты технических наук Л.Н. Тимашова, М.В. Колесников, Ю.К. Грузевич, И.В. Животовский и многие другие преподаватели и сотрудники кафедры «Лазерные и оптико-электронные системы», которые с гордостью называют себя учениками Г.М. Мосягина.

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

АИ — анализатор изображения
АИМ — амплитудно-импульсная модуляция
ВИМ — время-импульсная модуляция
ВКУ — видеоконтрольное устройство
ДОС — дифракционно-ограниченная оптическая система
ЖК — жидкокристаллический
ИК — инфракрасный
ИОС — идеальная оптическая система
КОС — когерентная оптическая система
КПФ — когерентная передаточная функция
КФР — когерентная функция рассеяния
ЛПИ — линейка приемников излучения
МАИ — модулятор анализатора изображения
МВЗ — множество возможных значений
МПИ — матричный приемник излучения
МПФ — модуляционная передаточная функция
НКОС — некогерентная оптическая система
НКПФ — некогерентная передаточная функция
НКФР — некогерентная функция рассеяния
НЧ — низкочастотный
НЭ — нелинейный элемент
ОПФ — оптическая передаточная функция
ОС — оптическая система
ОЭП — оптико-электронный прибор
ОЭС — оптико-электронная система
ПИ — приемник излучения
ППФ — пространственная передаточная функция
ПЧС — пространственно-частотный спектр
ПФ — передаточная функция
РОС — реальная оптическая система
СВ — случайная величина
СД — светодиод
УФ — ультрафиолетовый

ФИМ — фазоимпульсная модуляция
ФОП — функционал отношения правдоподобия
ФПУ — фотоприемное устройство
ЧИМ — частотно-импульсная модуляция
ЧВС — частотно-временной спектр
ЧКОС — частично когерентная оптическая система
ЧС — частотный спектр
ЧФХ — частотно-фазовая характеристика
ШИМ — широтно-импульсная модуляция
ЭЛТ — электронно-лучевая трубка
ЭС — электронная система

ВВЕДЕНИЕ

Оптико-электронные приборы (ОЭП) открывают широкие возможности для познания окружающего мира, приема, передачи и обработки значительных массивов данных. В связи с этим ОЭП используются практически во всех областях науки и техники.

Прогресс в области оптико-электронного приборостроения связан с совершенствованием элементной базы, используемой в ОЭП, а также развитием методик проектирования, в основе которых лежат методы математического моделирования.

Целью дисциплины «Теория оптико-электронных систем» является изложение теоретических основ преобразования сигналов элементами, входящими в состав ОЭП. Несмотря на разнообразие принципов действия и функционального назначения ОЭП, математическое моделирование позволяет перейти к достаточно общему описанию этих приборов как объектов проектирования для выполнения базовых проектных процедур, в том числе анализа и параметрической оптимизации.

Определение оптико-электронного прибора

Принципиальное отличие ОЭП от радиотехнических, акустических и других приборов, аналогичных по назначению, заключается в том, что в них осуществляется обработка оптических сигналов. Этот фактор в значительной степени определяет специфику входящих в состав ОЭП элементов, особенности схемного построения этих приборов, а также алгоритмов, используемых для обработки сигналов.

Оптико-электронный прибор — сложная система, в состав которой входят оптические, фотоэлектрические, электронные, вычислительные и механические устройства, которые, в свою очередь, также представляют собой достаточно сложные подсистемы. В связи с этим вместо термина «ОЭП» часто используют термин «оптико-электронная система» (ОЭС). Обобщая известные определения, будем считать, что ОЭП — это сложная систе-

ма, элементы которой осуществляют преобразование оптических и электрических сигналов для извлечения информации об объектах или явлениях, используемой для принятия управленческих решений.

Классификация оптико-электронных приборов

Классификация ОЭП осуществляется по различным признакам: назначению, областям применения, принципам формирования оптического сигнала, рабочему спектральному диапазону излучения, степени участия оператора в анализе принятого оптического сигнала и др. Рассмотрим классификации ОЭП.

По функциональному назначению:
- информационные;
- измерительные;
- следящие.

По областям применения:
- промышленные;
- военные;
- транспортные;
- медицинские;
- научные;
- для обеспечения безопасности.

По принципам формирования входного оптического сигнала:
- пассивные;
- активные;
- полуактивные.

По рабочему спектральному диапазону:
- ультрафиолетового (УФ) диапазона;
- инфракрасного (ИК) диапазона;
- видимого диапазона.

По степени когерентности источника оптического излучения:
- когерентные (лазерные);
- некогерентные;
- частично когерентные.

По степени участия оператора:
- автоматические (автономные);
- неавтоматические (управляемые человеком-оператором);
- полуавтоматические (комбинированные).

Для задач проектирования ОЭП наиболее существенной является классификация по назначению, так как именно с этим

признаком классификации непосредственно связаны показатели качества (назначения) этих изделий. Рассмотрим классификацию по назначению более подробно.

Классификация оптико-электронных приборов по функциональному назначению

При классификации по функциональному назначению ОЭП с некоторой степенью условности разделяют на следующие типы: информационные, измерительные и следящие [8, 9].

Информационные ОЭП предназначены для приема и обработки оптических и электрических сигналов в целях извлечения качественной информации, определенной по распределению яркости пространства предметов, и принятии на основе этой информации решений об обнаружении или распознавании образов объектов.

Данные ОЭП могут работать в автоматическом или полуавтоматическом режиме, а также непосредственно с человеком-оператором, который анализирует формируемое прибором изображение и принимает решения об обнаружении или распознавании образов объектов. Информационные ОЭП, предназначенные для работы с человеком-оператором, называются ОЭП наблюдения.

К информационным ОЭП относятся: телевизионные и тепловизионные приборы, приборы ночного видения, лазерные локационные, а также оптико-электронные пеленгаторы и др. Основными показателями, характеризующими работоспособность и качество информационных ОЭП, являются условные и безусловные вероятности обнаружения, селекции или распознавания объектов.

Измерительные ОЭП предназначены для приема и обработки оптических и электрических сигналов в целях измерения (оценки) значений параметров сигналов, характеризующих свойства или состояние объектов и явлений.

К измерительным ОЭП относятся радиометры и пирометры для измерения радиационной или истинной температуры поверхности, технологические приборы для измерения размеров деталей, лазерные дальномеры и др. Основными показателями, характеризующими работоспособность и качество приборов данного типа, являются погрешности измеряемых значений параметров или характеристик объектов.

Следящие ОЭП предназначены для приема и обработки оптических и электрических сигналов в целях измерения значений

каких-либо регулируемых параметров объектов или явлений и формирования управляющих сигналов, вызывающих уменьшение рассогласования между значениями входных и выходных регулируемых параметров.

К следящим ОЭП относятся: оптико-электронные головки самонаведения ракет, астрогиды телескопов, устройства с оптико-электронными датчиками информации для управления технологическими процессами и др. Отличительной особенностью следящих ОЭП является наличие отрицательных обратных связей.

Как отмечалось выше, отнесение ОЭП к одному из приведенных типов является условным. Например, оптико-электронные пеленгаторы, предназначенные для обнаружения и измерения угловых координат объектов, можно отнести и к информационным, и к измерительным приборам. Приборы, предназначенные для выделения из оптического сигнала качественной и количественной информации, классифицируются как ***информационно-измерительные ОЭП***.

Следует отметить, что большинство ОЭП относится именно к информационно-измерительным приборам. Примерами информационно-измерительных ОЭП являются:

- обзорно-поисковые оптико-электронные пеленгаторы для обнаружения сигналов от целей, селекции (распознавания) и измерения угловых координат целей;
- следящие оптико-электронные пеленгаторы для обнаружения и селекции сигналов от целей, измерения их угловых координат и вектора относительной угловой скорости для наведения снаряда на цель в соответствии с заданной траекторией встречи;
- звездные датчики для обнаружения и распознавания групп небесных светил, а также измерения их относительных угловых координат в целях определения ориентации космических аппаратов в пространстве.

Основные понятия теории преобразования сигналов в оптико-электронных приборах и способы преобразования сигналов

К основополагающим понятиям дисциплины относятся информация, сообщение и сигнал.

Информация — совокупность сведений об окружающем мире, которые являются объектом преобразования, хранения, передачи и использования.

Для того чтобы какие-либо сведения об окружающем мире содержали информацию, необходимо наличие неопределенности этих сведений. Например, если вероятность некоторого события равна единице, то факт возникновения этого события не несет никакой информации.

Все реальные объекты, существующие в природе, являются источниками собственного, отраженного или прошедшего сквозь них оптического излучения, в котором содержится информация о характеристиках и параметрах объектов. Для передачи или хранения информации используют различные способы описания в виде знаков (символов), а также в виде изображений (монохромных, цветных, двумерных, трехмерных и др.).

Сообщением называется совокупность знаков и прочих описаний, которые содержат информацию об окружающем мире. Примерами сообщений являются распределение яркости по поверхности объекта, коэффициент пропускания оптического элемента по длинам волн излучения и др.

Передача сообщений осуществляется с помощью каких-либо материальных носителей (электромагнитных волн, электрических колебаний, звуковых колебаний и т. д.). Сигнал — это физическая форма, используемая для передачи сообщений. При формировании сигнала параметры физического процесса, например амплитуда, фаза или частота колебаний, изменяются в соответствии с передаваемым сообщением.

Сигналом называется физический процесс, в параметрах которого содержится передаваемое сообщение.

Для ОЭП, работающих в пассивном режиме, сигналы формируются естественным образом. Для ОЭП, работающих в активном режиме, примером которых являются оптические линии связи, сигналы формируются путем изменения тех или иных параметров оптического сигнала в соответствии с передаваемыми сообщениями.

Процесс формирования сигналов осуществляется путем выполнения операций кодирования и модуляции. *Кодирование* выполняется в целях шифрования сообщений для обеспечения скрытности или уменьшении избыточности информации, содержащейся в сообщении, и заключается в преобразовании сообщения в некоторую совокупность кодовых символов.

Модуляция заключается в преобразовании кодовых символов в сигналы, пригодные для передачи по тому или иному каналу связи. Принцип модуляции состоит в изменении одного или не-

скольких параметров несущего колебания в соответствии с передаваемым сообщением. Если для передачи сообщения используется гармонический сигнал вида

$$S(t) = a_0 \cos\left(2\pi\nu_0 t + \phi_0\right),$$

то сообщение может быть закодировано в амплитуде, фазе и частоте сигнала с использованием соответствующих видов модуляции: амплитудной (АМ), частотной (ЧМ) и фазовой (ФМ).

Если для передачи сообщения используется периодическая последовательность прямоугольных импульсов вида

$$S(t) = a_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{t - kT_0}{t_0}\right),$$

то сообщение может быть закодировано путем использования следующих видов импульсной модуляции: амплитудно-импульсной (АИМ), широтно-импульсной (ШИМ), время-импульсной (ВИМ); последняя разделяется на фазоимпульсную (ФИМ) и частотно-импульсную (ЧИМ).

Переданное сообщение в приемном устройстве линии связи восстанавливается путем демодуляции и декодирования. В системах передачи непрерывных сообщений в результате ***демодуляции*** восстанавливается первичный сигнал, отображающий переданное сообщение. В системах передачи дискретных сообщений в результате демодуляции последовательность элементов сигнала преобразуется в последовательность кодовых символов, после чего эта последовательность преобразуется в последовательность элементов сообщения, выдаваемую получателю. Такое преобразование называется ***декодированием***. Устройства, осуществляющие кодирование и декодирование, называются ***кодером*** и ***декодером***. Существует две группы устройств: кодеки и модемы. ***Кодек*** — устройство, преобразующее сообщение в код (кодер) и код в сообщение (декодер), а ***модем*** — устройство, преобразующее код в сигнал (модулятор) и сигнал в код (демодулятор). На рис. В1 представлена структурная схема системы передачи дискретных сообщений.

Независимо от физической природы сигналы описывают функциями. Особенность оптических сигналов заключается в многомерности функций, используемых для описания. Например, сигнал в виде распределения яркости в пространстве предме-

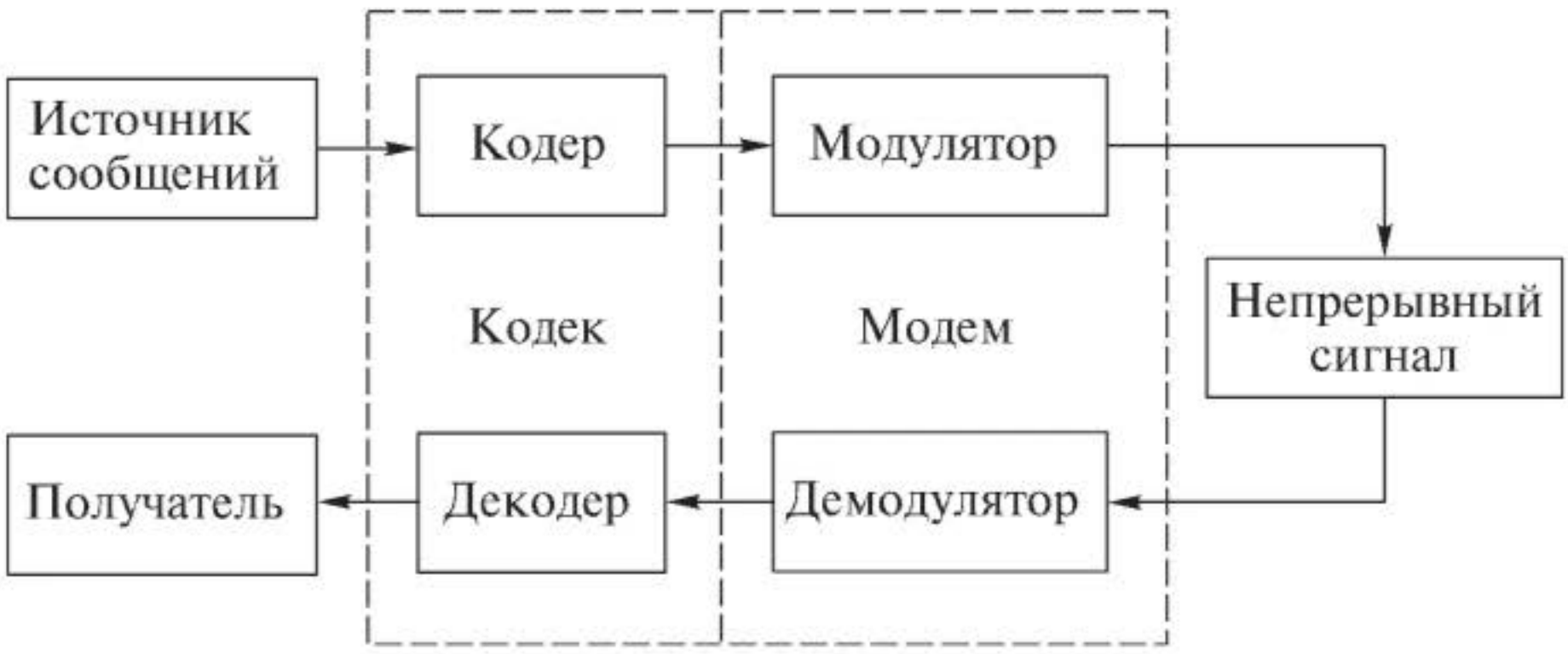


Рис. В1. Структурная схема системы передачи дискретных сообщений

тов описывается функцией $L_\lambda(\lambda, x, y, z, t)$, аргументами которой являются длина волны λ излучения, пространственные координаты x, y, z и время t.

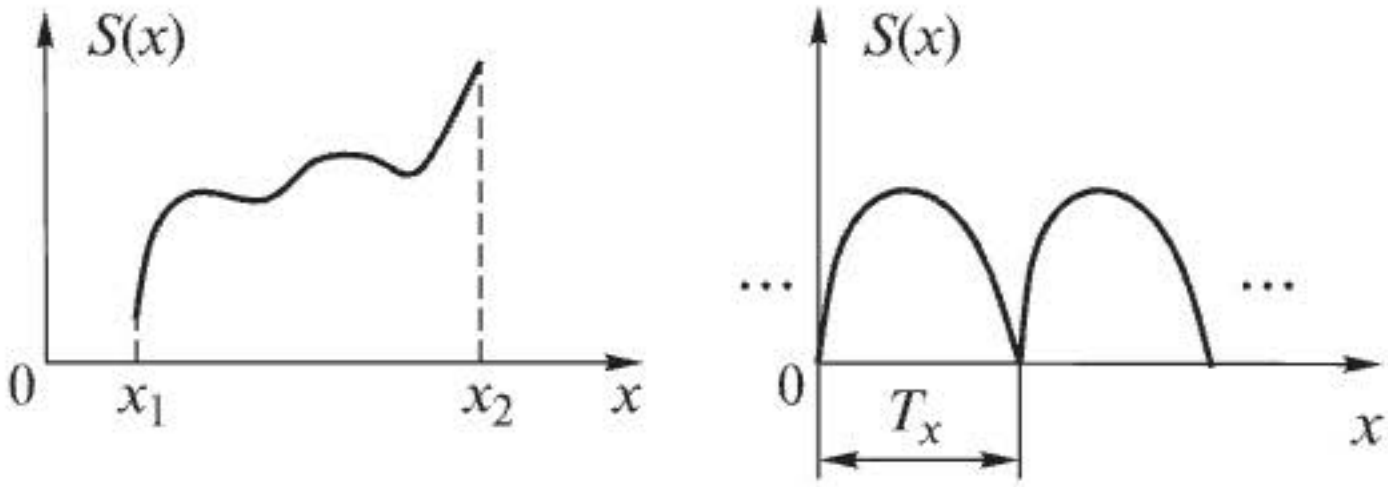
Различают детерминированные (регулярные) и случайные (недетерминированные) сигналы. К ***детерминированным сигналам*** относятся сигналы, которые могут быть заданы точными или приближенными математическими зависимостями от пространственных координат и времени, т. е. их значения в любой момент времени в любой точке пространства могут быть предсказаны с вероятностью, равной единице.

Случайными сигналами называются сигналы, которые не могут быть заданы точными или приближенными математическими зависимостями от пространственных координат и времени, а могут быть предсказаны в некоторый момент времени в фиксированной точке пространства с некоторой вероятностью, меньшей единицы. Отдельные реализации таких сигналов описывают одномерными или многомерными случайными функциями, которые не содержат достаточной информации о статистических свойствах случайных процессов или полей. Свойства случайных процессов или полей описывают осредненными статистическими характеристиками, которые представляют детерминированными функциями.

Случайными могут быть не только сигналы, содержащие сообщения, но и помехи, возникающие как в процессе формирования сигналов, так и при их обработке. Например, при преобразовании оптического сигнала в электрический в приемнике излучения возникает помеха, которую называют шумом.

Типы детерминированных сигналов

Аналоговые (непрерывные) или ***континуальные сигналы*** описываются непрерывными или кусочно-непрерывными функциями (рис. В2). Среди детерминированных аналоговых сигналов различают периодические и непериодические сигналы.



а *б*

Рис. В2. Примеры непериодического (*а*) и периодического (*б*) аналоговых сигналов

Дискретные сигналы описываются функциями, имеющими любые значения для дискретного набора значений аргумента (рис. В3).

Квантованные сигналы описываются функциями, имеющими квантованные значения для непрерывных значений аргумента (рис. В4) на области определения.

Цифровые сигналы описываются функциями, имеющими квантованные значения, которые отличны от нуля только при дискретных значениях аргумента (рис. В5).

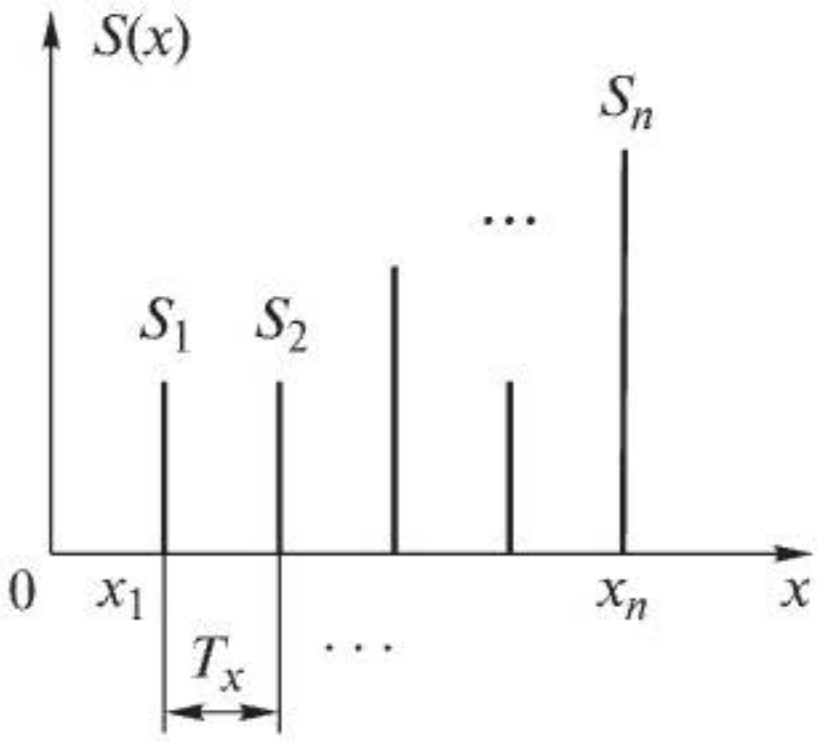


Рис. В3. Дискретный сигнал (T_x — период дискретизации)

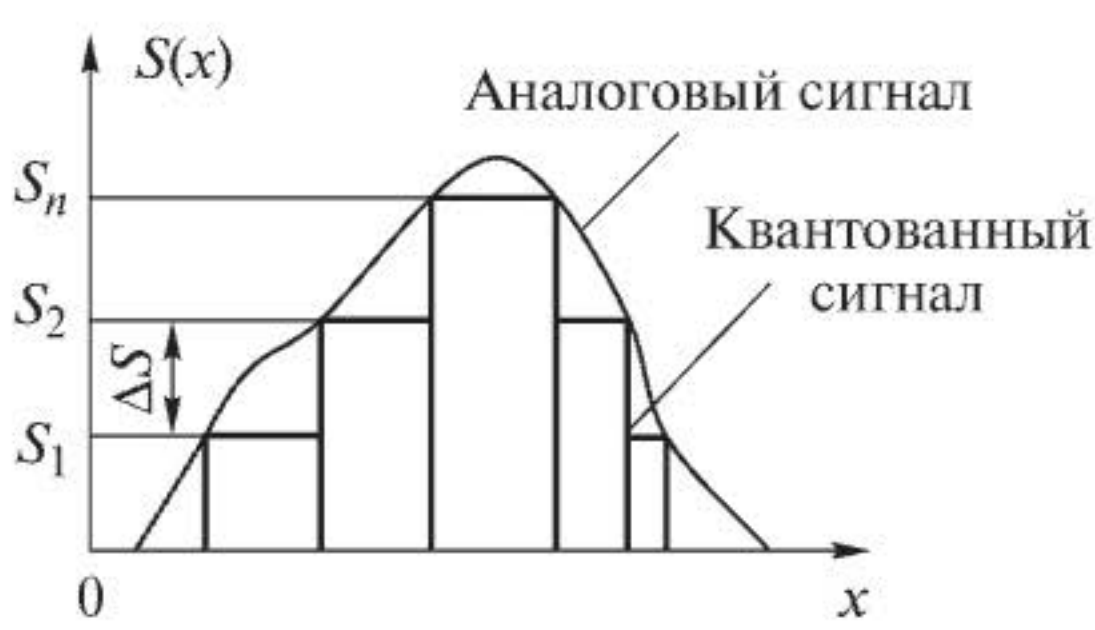


Рис. В4. Квантованный сигнал (ΔS — шаг квантования)

Помехи и искажения сигнала в тракте ОЭП. В любом реальном канале передачи сообщений, в частности в тракте ОЭП, действуют помехи и помимо этого сигнал подвергается линейным и нелинейным искажениям. Вследствие влияния этих факторов принятое сообщение воспроизводится с ошибками.

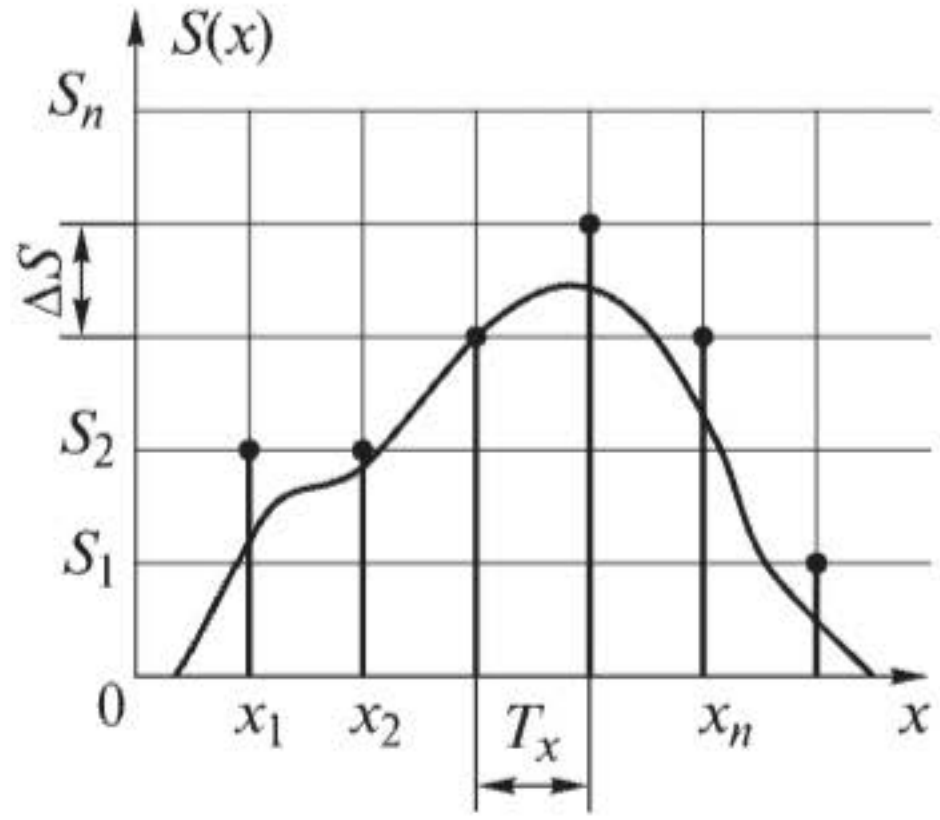


Рис. В5. Пример цифрового сигнала (T_x — период дискретизации, ΔS — шаг квантования)

Помехой называют любое случайное воздействие на сигнал, которое ухудшает правильность воспроизведения передаваемых сообщений. Помехи могут быть как внешними (например, вследствие турбулентности атмосферы), так и внутренними, возникающими при преобразовании сигналов элементами тракта ОЭП.

В общем виде влияние помехи $n = n(\lambda, x, y, z, t)$ на передаваемый сигнал $S = S(\lambda, x, y, z, t)$ описывается оператором $S^{\text{вых}} = \Im\{S, n\}$.

В случае когда оператор определяет суммирование, $S^{\text{вых}} = S + n$, помеха называется ***аддитивной***. Если же оператор определяет операцию умножения, т. е. $S^{\text{вых}} = Sn$, помеха называется ***мультипликативной***. В реальных каналах передачи сообщений могут действовать как аддитивные, так и мультипликативные помехи. Для сигналов, обрабатываемых в ОЭП, источниками помех может быть среда, в которой распространяется оптическое излучение. Такие помехи называют внешними. Внутренние помехи возникают в тракте ОЭП, в частности при преобразовании оптического излучения в электрический сигнал.

Для принятия правильных решений о сообщениях, которые содержатся в сигнале при наличии помех, требуется подвергнуть зарегистрированный сигнал специальной обработке. Важнейшей задачей при проектировании ОЭП является синтез алгоритмов обработки сигналов, обеспечивающих наиболее достоверное извлечение информации.

Обсудим теперь линейные и нелинейные искажения сигналов, которые могут вносить элементы ОЭП. Для этого введем понятие «техническая система».

Техническая система применительно к оптико-электронным приборам

Техническая система — это совокупность упорядоченно взаимодействующих элементов, обладающая свойствами, не сводящимися к свойствам отдельных элементов, и предназначенная для выполнения определенных полезных функций. Очевидно, что с позиций этого определения ОЭП является технической системой.

В основе системного подхода к анализу процессов преобразования сигналов лежит исследование преобразующих свойств ОЭП как системы взаимосвязанных элементов. Научной базой системного подхода является математическая теория, описывающая преобразование совокупности входных сигналов в совокупность выходных сигналов.

Линейная система осуществляет преобразование линейной комбинации входных сигналов $S^{\text{вх}}(x, y)$ в линейную комбинацию выходных сигналов $S^{\text{вых}}(x, y)$. Преобразование, которое осуществляет линейная система, описывается линейным оператором $\Im_{\text{л}}\{\cdot\}$:

$$S^{\text{вых}}(x, y, t) = \Im_{\text{л}}\left\{S^{\text{вх}}(x, y, t)\right\}.$$

Пусть задана линейная комбинация входных сигналов

$$S^{\text{вх}}(x, y) = C_1 S_1(x, y) + C_2 S_2(x, y) + C_3 S_3(x, y).$$

Тогда преобразование линейной системой этой комбинации входных сигналов описывается в виде

$$S^{\text{вых}}(x, y) = \Im_{\text{л}}\left\{S^{\text{вх}}(x, y)\right\} = \Im_{\text{л}}\left\{C_1 S_1(x, y) + C_2 S_2(x, y) + C_3 S_3(x, y)\right\} =$$

$$= C_1 \Im_{\text{л}}\left\{S_1(x, y)\right\} + C_2 \Im_{\text{л}}\left\{S_2(x, y)\right\} + C_3 \Im_{\text{л}}\left\{S_3(x, y)\right\} =$$

$$= C_1 S_1^{\text{вых}}(x, y) + C_2 S_2^{\text{вых}}(x, y) + C_3 S_3^{\text{вых}}(x, y),$$

где C_1, C_2, C_3 действительные или комплексные числа, которые можно выносить за знак линейного оператора.

Нелинейная система осуществляет преобразование, которое описывается нелинейными операторами $\Im_{\text{нл}}\{\cdot\}$:

$$S^{\text{ВЫХ}}(x, y, t) = \Im_{\text{НЛ}}\left\{S^{\text{ВХ}}(x, y, t)\right\}.$$

В качестве примера предположим, что оператор нелинейного преобразования осуществляет возведение во вторую степень входного сигнала, т. е. $S^{\text{ВЫХ}}(x, y, t) = \left[S^{\text{ВХ}}(x, y, t)\right]^2$.

Тогда линейная комбинация входных сигналов

$$S^{\text{ВХ}}(x, y\ ) \ C_1 S_1\ x\ y\ ) \ C_2 S_2\ x\ y\ \ )$$

преобразуется нелинейной системой в нелинейную комбинацию сигналов

$$S^{\text{ВЫХ}}(x, y\ ) = \left[C_1 S_1\ x\ y\ ) + C_2 S_2\ x\ y\ \right]^2) =$$

$$= C_1^2 S_1^2(x, y\ ) + C_2^2 S_2^2\ x\ y\ ) + 2C_1 C_2 S_1(x, y\ S_2\ x, y).$$

Преобразование входных сигналов, которые осуществляют линейные системы, называют также линейными искажениями сигналов, а преобразования, осуществляемые нелинейными системами, — нелинейными искажениями.

Структурная схема оптико-электронного прибора

Математическое моделирование лежит в основе современных методов проектирования ОЭП. Математическая модель ОЭП как объекта проектирования включает в себя структурное и функциональное описания. Структурное описание представляет собой структурную схему, определяющую состав и взаимосвязи элементов объекта проектирования, которые идеализируются в рамках принятых допущений. Функциональное описание — функциональная математическая модель — определяет поведение каждого из этих элементов при преобразовании сигналов. Другими словами, функциональная математическая модель для каждого из элементов структурной схемы задает операторы преобразования, которые определяются в пространстве функций, описывающих сигналы в объекте проектирования.

В настоящей дисциплине излагаются теоретические основы преобразования сигналов элементами, входящими в состав ОЭП, которые могут быть положены в основу функциональной математической модели. Для того чтобы конкретизировать объект

изучения дисциплины, рассмотрим обобщенную структурную схему (рис. В6), которая отражает состав типовых элементов ОЭП и связи между ними.

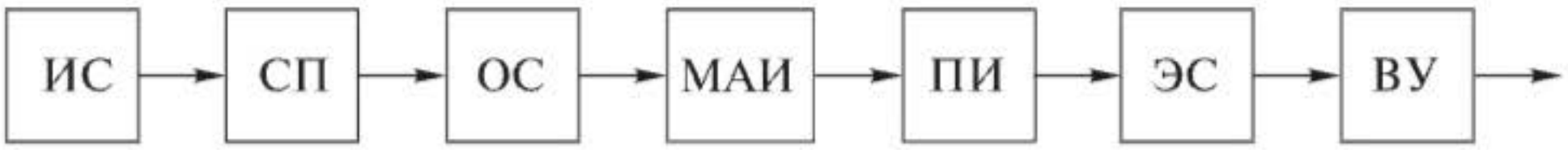


Рис. В6. Обобщенная структурная схема ОЭП:

ИС — источник оптических сигналов; СП — слой пространства; ОС — оптическая система; МАИ — модулятор анализатора изображения; ПИ — приемник излучения; ЭС — электронная система; ВУ — выходное устройство

Следует отметить, что эта схема в упрощенном виде иллюстрирует состав ОЭП, но не является структурной схемой модельного описания ОЭП как объекта проектирования.

Рассмотрим назначение элементов схемы, представленной на рис. В6, а также ограничения, принятые при их математическом описании.

Источник оптического сигнала. Источники оптических сигналов можно классифицировать по различным признакам, в том числе:

- по степени когерентности излучения;
- степени детерминированности.

Связи между оптическими сигналами, которые классифицируются по этим признакам, приведены на рис. В7.

Рис. В7. Классификация оптических сигналов

В настоящей дисциплине в основном рассматривается математическое описание преобразования когерентных и некогерентных оптических сигналов. Когерентные оптические сигналы описываются в терминах комплексной амплитуды $A(x, y, z)$, некогерент-

ные детерминированные сигналы — в терминах интенсивностей, в том числе: спектральным пространственным распределением яркости $L_\lambda(\lambda, x, y)$ ламбертовского источника, спектральным распределением светимости $M_\lambda(\lambda, x, y)$, спектральной силой излучения $J_\lambda(\lambda)$ ламбертовского источника, спектральным пространственным распределением облученности $E_\lambda(\lambda, x', y')$, спектральным потоком излучения $\Phi_\lambda(\lambda)$. Для упрощения записи формульных зависимостей ниже будет использовано описание детерминированных сигналов от квазимонохроматических источников, которые излучают в узком спектральном интервале $\Delta\lambda$, а соответствующие характеристики излучения опреде-ляются соотношениями: $L_\lambda(x, y) = L_\lambda(\lambda, x, y)\Delta\lambda$, $M_\lambda(x, y) = M_\lambda(\lambda, x, y)\Delta\lambda$, $J_\lambda = J_\lambda(\lambda)\Delta\lambda$, $E_\lambda(x', y') = E_\lambda(\lambda, x', y')\Delta\lambda$, $\Phi_\lambda = \Phi_\lambda(\lambda)\Delta\lambda$.

Как будет показано ниже, описание случайных оптических сигналов в виде случайных полей яркости или облученности проводится с помощью корреляционных функций $Kr_L(\xi, \eta)$ и $Kr_E(\xi', \eta')$ или соответствующих им спектральных плотностей $\tilde{K}r_L(\nu_x, \nu_y)$ и $\tilde{K}r_E(\nu_x, \nu_y)$. Поскольку на практике исходные данные для определения характеристик случайных полей яркости получают на основе экспериментальных данных, полагаем, что эти характеристики определены для некоторой средней длины волны спектрального интервала $\Delta\lambda$, который соответствует рабочему спектральному диапазону ОЭП.

Слой пространства. Этот элемент структурной схемы позволяет учесть особенности среды, в которой распространяется оптический сигнал в пространстве от объекта до входного зрачка оптической системы. Известно, что при прохождении оптического излучения через слой пространства в виде атмосферы или водной среды происходит его поглощение и рассеяние. При расчетах это учитывается соответствующим спектральным коэффициентом $\tau(\lambda)$ пропускания, который описывает потери мощности излучения.

Вследствие неоднородности плотности слоя пространства, обусловленной флуктуациями температуры, может возникать эффект турбулентности, приводящий к искажениям оптических сигналов. Здесь принимается допущение о том, что такие эффекты отсутствуют.

Как будет показано ниже, при распространении когерентных оптических сигналов происходит изменение пространственной

структуры оптических волн, которое определяется длиной трассы распространения оптических волн в слое пространства.

Оптическая система. Как правило, ОС выполняет функцию формирования изображения объектов, находящихся в угловом поле ОЭП. Но, как будет показано ниже, формирование изображения ОС можно рассматривать не только с позиций геометрической оптики, но и как процесс преобразования оптического сигнала линейной системой, осуществляющей его пространственную фильтрацию.

Кроме того, при когерентной подсветке объекта ОС может не только формировать изображение объекта, но и выполнять операцию двумерного преобразования Фурье. Это свойство ОС используется в системах оптической обработки сигналов.

Модулятор анализатора изображения. Модулятор анализатора изображения (МАИ), как правило, используется в составе оптико-электронных пеленгаторов следящего типа и выполняет следующие функции: модуляцию оптического сигнала, в процессе которой осуществляется кодирование информации об угловых координатах объектов в параметрах оптического сигнала; пространственную фильтрацию оптических сигналов для селекции изображения объекта от внешних фоновых помех. Модулятор представляет собой оптико-механическое устройство, в состав которого входит транспарант, устанавливаемый в плоскость изображения ОС, и привод, осуществляющий относительное перемещение транспаранта и изображения. Описание конкретных типов МАИ и принципов их действия приведено в работах [1, 2].

Приемник излучения. Основной функцией приемника излучения (ПИ) является преобразование оптического сигнала в электрический. Если в составе ОЭП имеется МАИ, то ПИ устанавливают после транспаранта МАИ таким образом, чтобы весь поток излучения после этого элемента попадал на чувствительную площадку ПИ. В современных ОЭП используются многоэлементные ПИ, в которых чувствительные площадки располагаются в виде линеек или матриц. В этом случае основные функции МАИ осуществляются с помощью многоэлементных ПИ, что позволяет существенно упростить конструктивное оформление и габариты ОЭП.

Электронная система. В электронной системе (ЭС) ОЭП осуществляется первичная и вторичная обработка электрических сигналов, формируемых одноэлементными или многоэлементными ПИ. Первичная обработка заключается в усилении и фильтра-

ции сигналов от помех, вторичная — в измерении (оценке) значений параметров сигналов, в которых содержится информация об объектах, или принятии решения о наличии сигнала от объекта и отнесению его к какому-либо классу. В состав ЭС могут входить элементы, выполняющие как аналоговую, так и цифровую обработку сигналов.

Выходное устройство. Большинство ОЭП, работающих в автоматическом режиме, формирует на выходе информационный сигнал и не имеет в своем составе каких-либо выходных устройств. Единственными ОЭП, в которых используются выходные устройства, являются ОЭП наблюдения. Эти приборы формируют изображения объектов для наблюдения их человеком-оператором. Устройства, формирующие изображения на выходе ОЭП наблюдения, называются ***видеоконтрольными устройствами*** (ВКУ).

Типичным примером ВКУ являются телевизионные мониторы. Кроме телевизионных мониторов, для формирования изображения в ОЭП наблюдения используются устройства, работающие и на других принципах.

Ч. I. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ ОПТИКО-ЭЛЕКТРОННЫХ ПРИБОРОВ

1. ОПИСАНИЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ

1.1. Функции, используемые при описании сигналов

1.1.1. Экспоненциальные функции

Для описания преобразования оптических и электрических сигналов в ОЭП широко используется комплексная экспоненциальная функция одной переменной, определение которой через ряд Тейлора имеет вид

$$\exp(\pm ix) = 1 + (\pm ix) + \frac{(\pm ix)^2}{2!} + \frac{(\pm ix)^3}{3!} + \ldots \text{ при } |x| < \infty, \qquad (1.1)$$

где i — мнимая единица $\left(i = \sqrt{-1}\right)$.

Комплексную экспоненту можно выразить формулами Эйлера:

$$\exp(ix) = \cos(x) + i\sin(x); \qquad (1.2)$$

$$\exp(-ix) = \cos(x) - i\sin(x), \qquad (1.3)$$

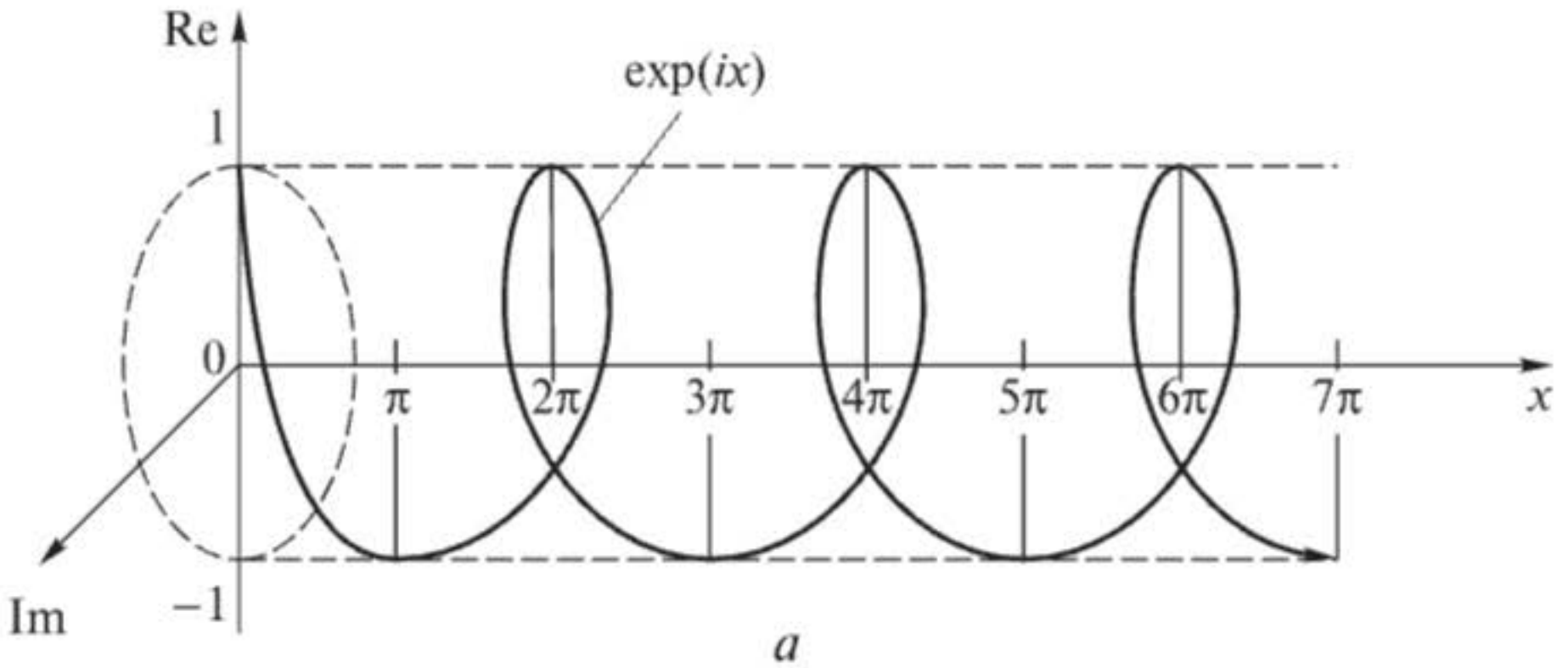
из которых следует

$$\cos x = \frac{1}{2}\left[\exp(ix) + \exp(-ix)\right];$$

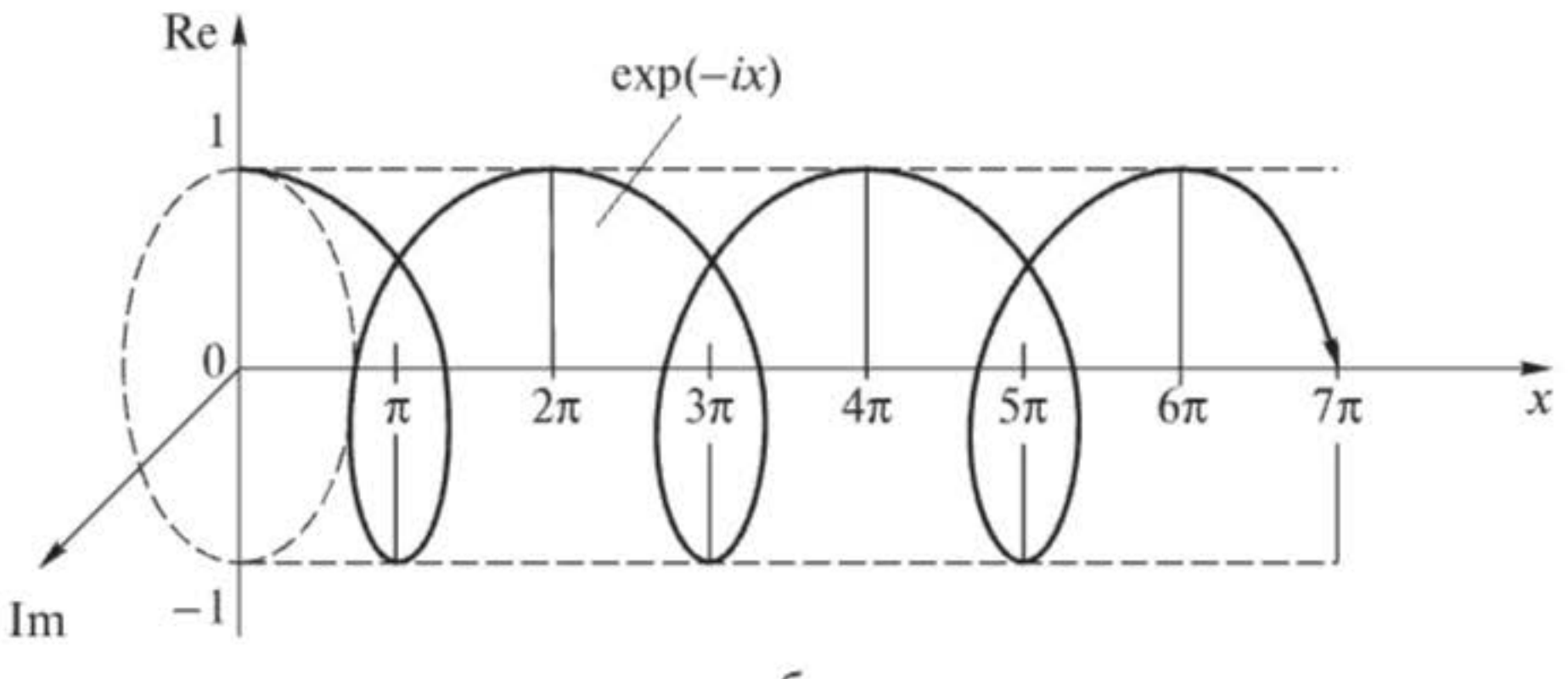
$$\sin x = \frac{1}{2i}\left[\exp(ix) - \exp(-ix)\right].$$

Комплексные экспоненты (1.2) и (1.3) состоят из действительной $\mathrm{Re}[\exp(\pm ix)] = \cos(x)$ и мнимой $\mathrm{Im}[\exp(\pm ix)] = \pm\sin(x)$ частей.

Поэтому графики этих функций можно построить только на комплексной плоскости (рис. 1.1). Графики имеют вид винтовой линии, причем $\exp(ix)$ соответствует вращению против хода часовой стрелки (рис. 1.1, *а*), а $\exp(-ix)$ — по ходу часовой стрелки (рис. 1.1, *б*), если смотреть от конца оси x.



а



б

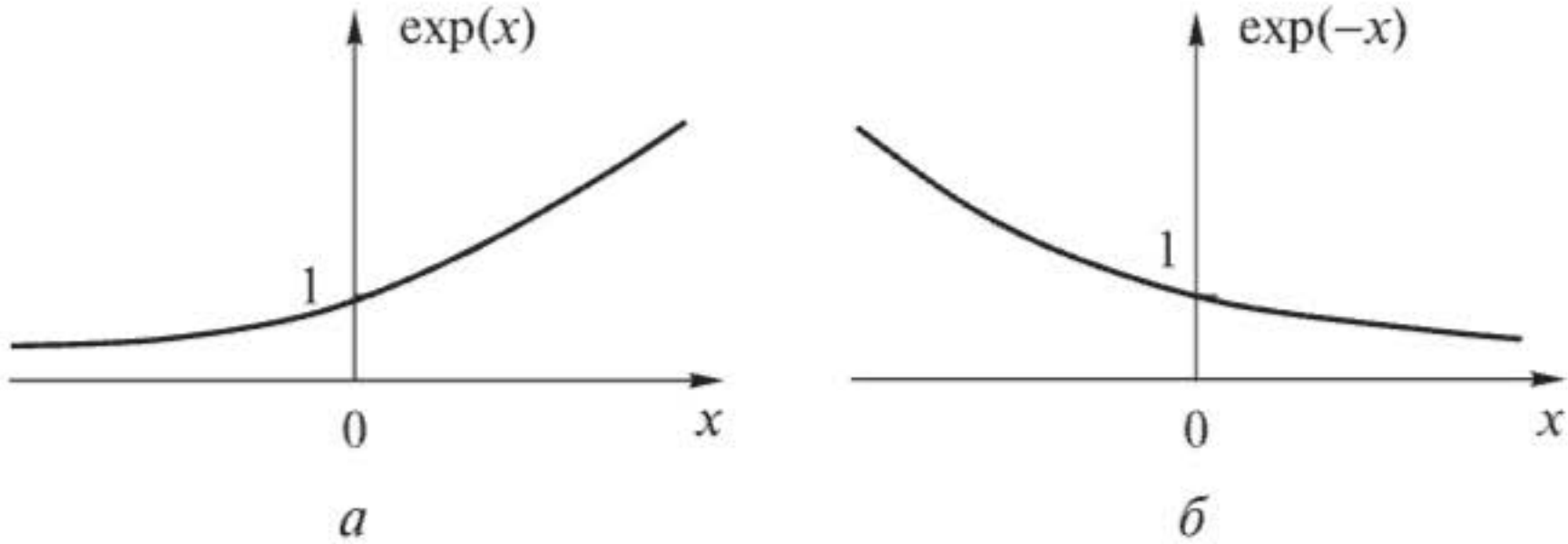
Рис. 1.1. Графики комплексных экспоненциальных функций

Модуль комплексных экспонент $\left|\exp(\pm ix)\right| = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} = 1$. Вещественные экспоненты вида

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \text{ при } |x| < \infty; \tag{1.4}$$

$$\exp(-x) = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots \text{ при } |x| < \infty \tag{1.5}$$

определяют классические показательные функции с основанием *e*. Графики функций $\exp(x)$ и $\exp(-x)$ представлены соответственно на рис. 1.2, *а* и 1.2, *б*.



а *б*

Рис. 1.2. Графики экспоненциальных функций $\exp(\pm x)$

Для описания оптических сигналов используются комплексные экспоненциальные функции нескольких переменных, в том числе $\exp[\pm i(x+y)]$ и $\exp[\pm i(x+y+z)]$. Например, комплексная амплитуда единичной плоской волны, распространяющейся в положительном направлении оси *z*, описывается функцией

$$A(x;y;z)=\exp\left[i2\pi\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda}x+\frac{\cos\beta}{\lambda}y+\frac{\cos\gamma}{\lambda}z\right)\right],$$

где α,β,γ — соответственно углы между нормалью к волновой поверхности и осями *x*, *y*, *z*. Вещественные экспоненциальные функции вида $\exp(\pm(x+y+z))$ определяют показательные функции нескольких переменных.

Функции в виде двумерных квадратичных комплексных экспонент $\exp\left[i\left(x^2+y^2\right)\right]$ и $\exp\left[-i\left(x^2+y^2\right)\right]$ описывают комплексную амплитуду расходящейся или сходящейся волны в квадратичном (параксиальном) приближении:

$$A(x,y,z)=\frac{a_0}{z}\exp\left[\pm i\frac{\pi}{\lambda z}\left(x^2+y^2\right)\right],$$

причем знак «плюс» соответствует расходящейся волне, знак «минус» — сходящейся.

Рассмотрим функции в виде квадратичной экспоненты вида $\exp(\pm x^2)$. Графики этих функций представлены на рис. 1.3.

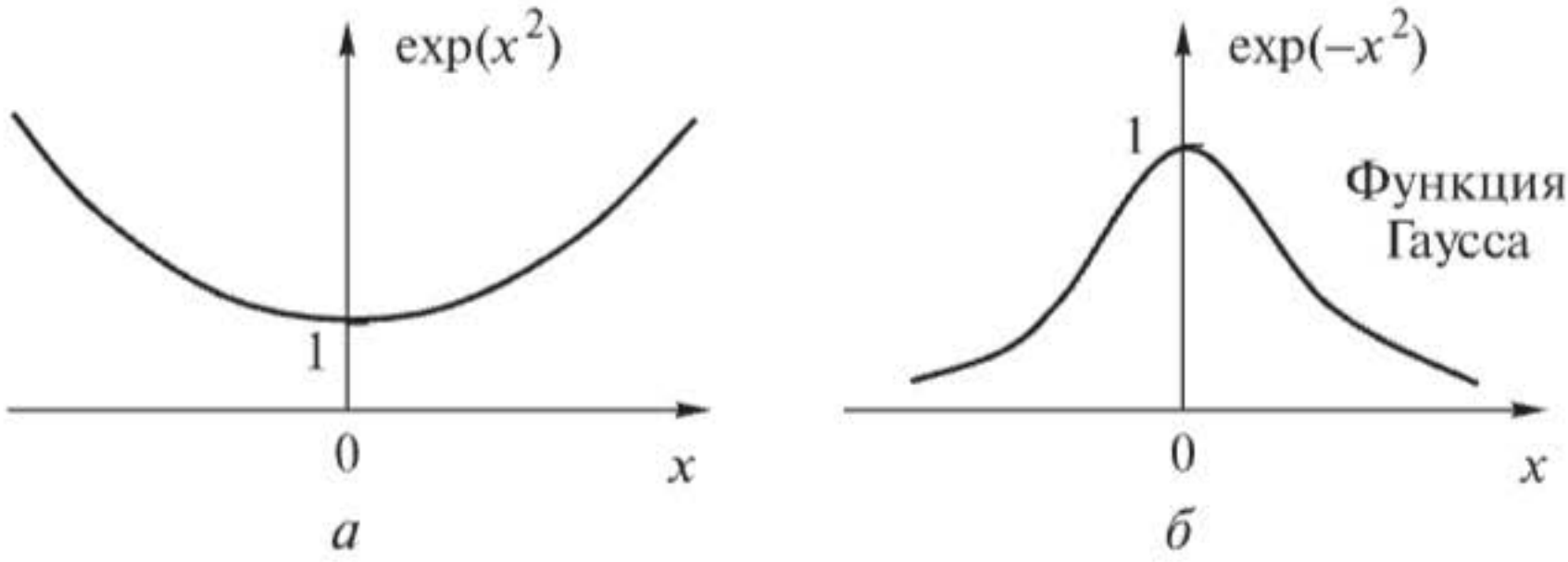


Рис. 1.3. Графики функций $\exp(\pm x^2)$

Функции с вещественными квадратичными аргументами вида $\exp(-x^2)$ и $\exp\left[-\left(x^2+y^2\right)\right]$ называются функциями Гаусса одной и двух переменных соответственно.

1.1.2. Прямоугольные функции

Одномерная прямоугольная функция (рис. 1.4) определяется выражением

$$s(x)=\operatorname{rect}(x)=\begin{cases}1 & |x|\le\dfrac{1}{2};\\ 0 & |x|>\dfrac{1}{2}.\end{cases} \tag{1.6}$$

Площадь под графиком прямоугольной функции равна единице:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1\,dx=\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)=1.$$

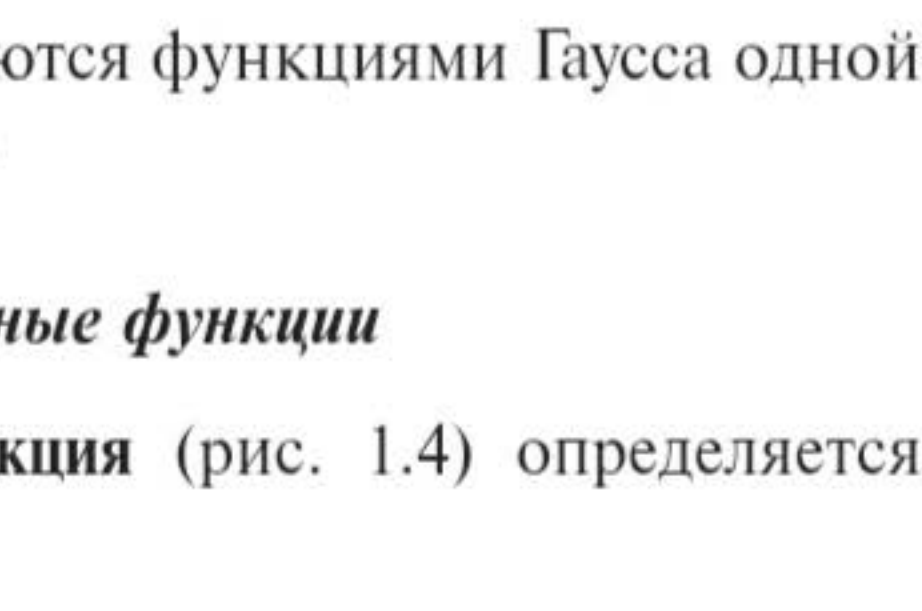


Рис. 1.4. График одномерной прямоугольной функции

Произвольный одномерный прямоугольный импульс $s(x)$ (рис. 1.5) можно выразить через прямоугольную функцию (rect-функцию) в следующем виде:

$$s(x)=b\operatorname{rect}\left(\frac{x}{a}\right).$$

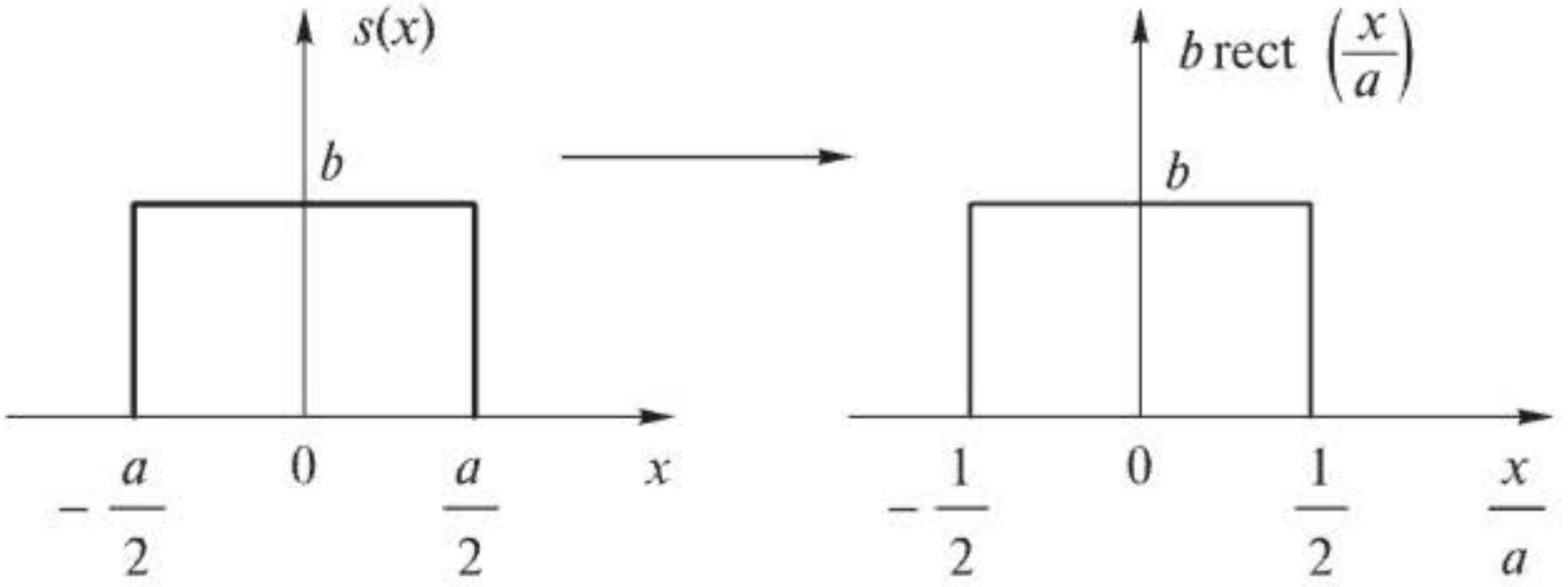


Рис. 1.5. Переход от функции $s(x)$ к прямоугольной функции

При этом выполняется условие нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(x)dx = b\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{x}{a}\right)dx = ab\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{x}{a}\right)d\left(\frac{x}{a}\right) = ab.$$

Двумерная прямоугольная функция (рис. 1.6) определяется выражением

$$s(x, y) = \mathrm{rect}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{при } |x| \le \frac{1}{2},\ |y| \le \frac{1}{2}; \\ 0 & \text{при } |x| > \frac{1}{2},\ y \text{ — любое}; \\ & \text{при } |y| > \frac{1}{2},\ x \text{ — любое}. \end{cases} \qquad (1.7)$$

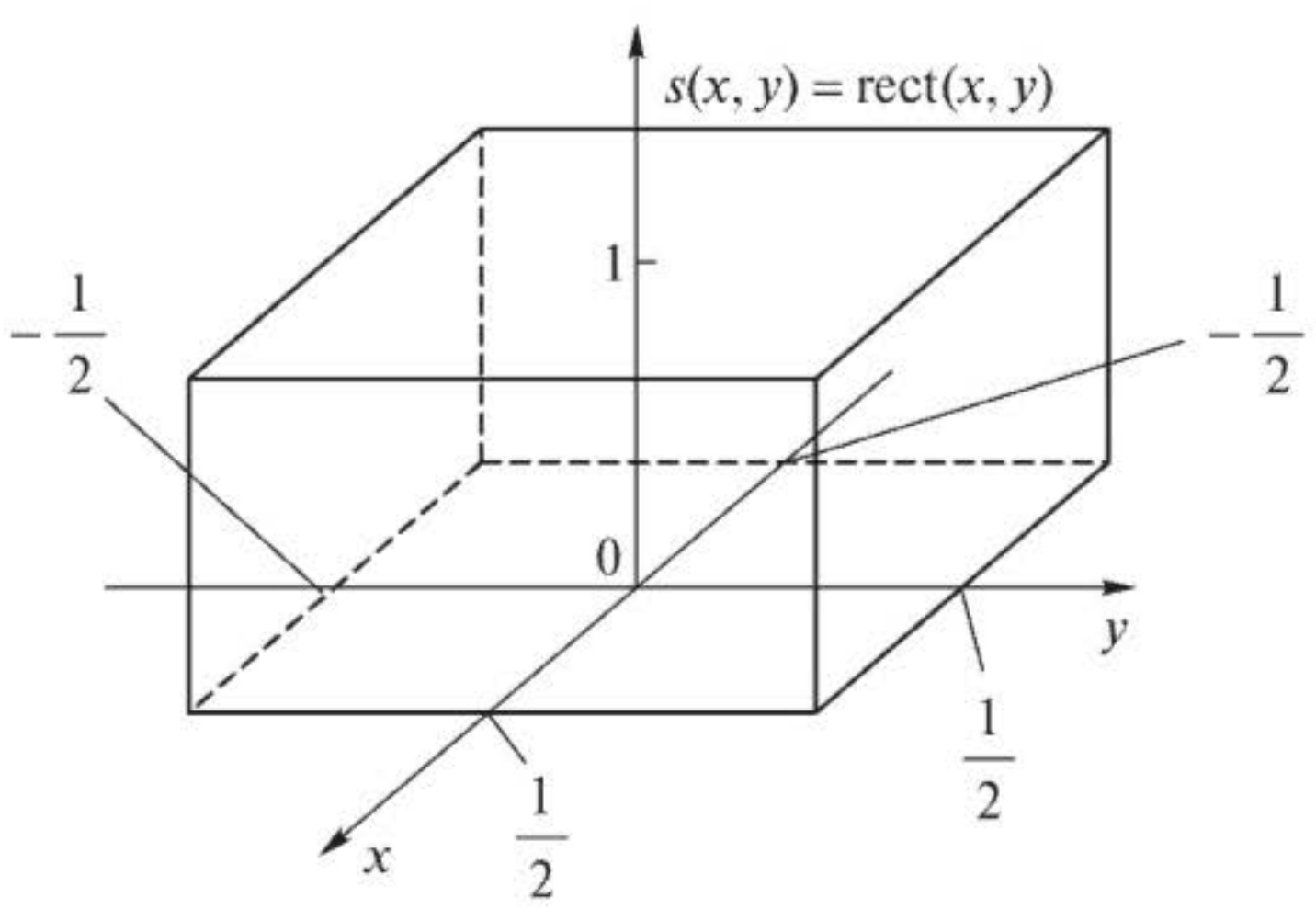


Рис. 1.6. График двумерной прямоугольной функции

Функция rect(x, y) разделяется по переменным, т. е. rect$(x, y) =$ rect (x) rect (y) Интеграл от этой функции также равен единице:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dy = 1.$$

Двумерную функцию в виде прямоугольного импульса можно выразить через rect-функцию двух переменных. Например, задана функция $s(x, y)$ в следующем виде:

$$s(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{ab} & \text{при} \quad |x| \le a/2, \quad |y| \le b/2; \\ 0 & \text{при} \quad \begin{cases} |x| > a/2, & y \text{ — любое;} \\ |y| > b/2, & x \text{ — любое.} \end{cases} \end{cases}$$

Заданную функцию $s(x, y)$ можно записать в виде $s(x, y) = \dfrac{1}{ab}\text{rect}\left(\dfrac{x}{a}, \dfrac{y}{b}\right)$. Тогда двойной интеграл от этой функции равен единице:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} s(x, y)dxdy = \frac{1}{ab}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy = 1.$$

1.2. Ряд Фурье и его основные свойства

1.2.1. Вещественный ряд Фурье

Периодическая вещественная функция $s(x) = s(x + T_x)$ с периодом T_x, удовлетворяющая условиям Дирихле, а именно ограниченная $|s(x)| < \infty$, кусочно-непрерывная и имеющая в пределах периода конечное число точек разрыва первого рода, может быть разложена в ряд Фурье. В оптических, электрических и других физических системах эти условия всегда выполняются. Тригонометрический ряд Фурье вещественной функции одной переменной записывается в следующем виде:

$$s(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\kappa=1}^{\infty} a_\kappa \cos\left(2\pi\frac{\kappa}{T_x}x\right) + \sum_{\kappa=1}^{\infty} b_\kappa \sin\left(2\pi\frac{\kappa}{T_x}x\right) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{\kappa=-1}^{\infty} d_\kappa \cos\left(2\pi\frac{\kappa}{T_x}x + \phi_\kappa\right), \qquad (1.8)$$

где $d_\kappa = \sqrt{a_\kappa^2 + b_\kappa^2}$; $\phi_\kappa = \text{arctg}\dfrac{-b_\kappa}{a_\kappa}$; $\kappa = 1, 2, \ldots, \infty$; $\dfrac{\kappa}{T_x}$ — частота;

$$a_0 = \frac{2}{T_x}\int_{-T_x/2}^{T_x/2} s(x)dx; \quad a_\kappa = \frac{2}{T_x}\int_{-T_x/2}^{T_x/2} s(x)\cos\left(2\pi\frac{\kappa}{T_x}x\right)dx;$$

$$b_\kappa = \frac{2}{T_x}\int_{-T_x/2}^{T_x/2} s(x)\sin\left(2\pi\frac{\kappa}{T_x}x\right)dx.$$

Величина $a_0/2$ выражает среднее значение функции за период и называется постоянной составляющей. Остальные слагаемые являются гармониками с амплитудами a_κ, b_κ и d_κ.

1.2.2. Комплексный ряд Фурье

При анализе оптических и электрических сигналов в некоторых случаях удобно использовать представление ряда Фурье в комплексной форме. Рассмотрим переход от тригонометрической к комплексной форме ряда Фурье. Используя формулы Эйлера, запишем

$$\sin\left(2\pi\frac{\kappa}{T_x}x\right) = \frac{1}{2i}\left[\exp\left(i\cdot 2\pi\frac{\kappa}{T_x}x\right) - \exp\left(-i\cdot 2\pi\frac{\kappa}{T_x}x\right)\right]; \qquad (1.9)$$

$$\cos\left(2\pi\frac{\kappa}{T_x}x\right) = \frac{1}{2}\left[\exp\left(i\cdot 2\pi\frac{\kappa}{T_x}x\right) + \exp\left(-i\cdot 2\pi\frac{\kappa}{T_x}x\right)\right]. \qquad (1.10)$$

Подставив (1.9) и (1.10) в (1.8), получим

$$s(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{1}{2}(a_\kappa - ib_\kappa)\exp\left(i\cdot 2\pi\frac{\kappa}{T_x}x\right) +$$

$$+\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{1}{2}(a_\kappa + ib_\kappa)\exp\left(-i\cdot 2\pi\frac{\kappa}{T_x}x\right). \qquad (1.11)$$

Обозначим $C_\kappa = \frac{1}{2}(a_\kappa - ib_\kappa)$ и $C_\kappa^* = \frac{1}{2}(a_\kappa + ib_\kappa)$, здесь C_κ и C_κ^* — комплексно-сопряженные величины. Найдем выражения для коэффициентов C_κ и C_κ^*:

$$C_\kappa = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{T_x}\int_{-T_x/2}^{T_x/2} s(x)\cos\left(2\pi\frac{\kappa}{T_x}x\right)dx - i\cdot\frac{2}{T_x}\int_{-T_x/2}^{T_x/2} s(x)\sin\left(2\pi\frac{\kappa}{T_x}x\right)dx\right] =$$

$$= \frac{1}{T_x}\int_{-T_x/2}^{T_x/2} s(x)\left[\cos\left(2\pi\frac{\kappa}{T_x}x\right) - i\sin\left(2\pi\frac{\kappa}{T_x}x\right)\right]dx =$$

$$= \frac{1}{T_x}\int_{-T_x/2}^{T_x/2} s(x)\exp\left(-i\cdot 2\pi\frac{\kappa}{T_x}x\right)dx;$$

$$C_\kappa^* = \frac{1}{T_x}\int_{-T_x/2}^{T_x/2} s(x)\exp\left(i\cdot 2\pi\frac{\kappa}{T_x}x\right)dx,$$

где $\kappa = 1, 2, \ldots, \infty$ — положительная величина.

Если заменить индекс κ на противоположный — $-\kappa$, то получим

$$C_{-\kappa} = \frac{1}{T_x}\int_{-T_x/2}^{T_x/2} s(x)\exp\left(i\cdot 2\pi\frac{\kappa}{T_x}x\right)dx = C_\kappa^*.$$

С учетом того, что $C_\kappa^* = C_{-\kappa}$ запишем ряд в виде

$$s(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} C_\kappa \exp\left(i\cdot 2\pi\frac{\kappa}{T_x}x\right) + \sum_{\kappa=1}^{\infty} C_{-\kappa}\exp\left(-i\cdot 2\pi\frac{\kappa}{T_x}x\right).$$

Заменив во второй сумме κ на $-\kappa$ и учитывая, что $C_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T_x}\int_{-T_x/2}^{T_x/2} s(x)dx$, получаем

$$s(x) = C_0 + \sum_{\kappa=1}^{\infty} C_\kappa \exp\left(i\cdot 2\pi\frac{\kappa}{T_x}x\right) + \sum_{\kappa=-\infty}^{-1} C_\kappa \exp\left(i\cdot 2\pi\frac{\kappa}{T_x}x\right) =$$

$$= \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} C_\kappa \exp\left(i\cdot 2\pi\frac{\kappa}{T_x}x\right), \qquad (1.12)$$

где $\kappa = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\infty$.

Коэффициент $C_к$ называется комплексной амплитудой. Найдем связь между $C_к$ и $d_к$:

$$C_к C_к^* = |C_к|^2 = \frac{1}{4}(a_к - ib_к)(a_к + b_к) = a_к^2 + b_к^2 = \frac{d_к^2}{4}.$$

Следовательно, $d_к = 2|C_к|$, или $C_к = |C_к|\exp(i\varphi_к) =$

$$= \frac{d_к}{2}\exp\left(-i\,\mathrm{arctg}\frac{b_к}{a_к}\right).$$

Таким образом, чтобы представить периодический сигнал с заданным периодом T_x в виде ряда Фурье, нужно вычислить амплитуды $d_к$, $C_к$ и начальные фазы $\varphi_к$ всех его гармонических составляющих.

Совокупность амплитуд гармоник называется спектром амплитуд (амплитудно-частотным спектром), а совокупность начальных фаз — спектром фаз (фазочастотным спектром).

Замечание. Амплитудные спектры можно изображать в двух видах: в виде зависимости вещественных амплитуд $d_к$ от дискретного набора пространственных частот $к/T_x$ или в виде аналогичной зависимости модуля комплексной амплитуды $|C_к|$ от $к/T_x$. В первом случае имеем дискретный спектр амплитуд, соответствующий лишь положительным частотам, включая нулевую частоту. Во втором случае дискретный спектр амплитуд соответствует как положительным, так и симметричным отрицательным частотам, но с амплитудами в 2 раза меньшими, чем в первом случае. Если в качестве входного сигнала рассматривается функция времени $s(t)$, то на практике для выделения временно́й гармоники применяется колебательный контур, настроенный на соответствующую частоту. Физически это означает, что определяются все временные гармоники с частотами $к/T_t$ $(к = 1, 2, \ldots, \infty)$. При этом отрицательные временные частоты физического смысла не имеют, комплексный

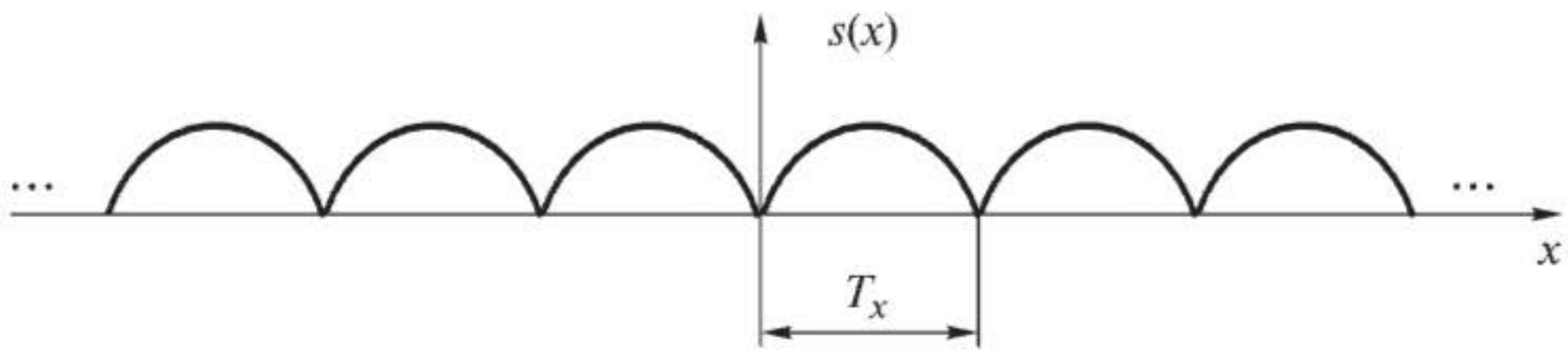


Рис. 1.7. График периодической функции $s(x)$

амплитудный спектр $|C_к|$ действительной функции расположен симметрично относительно нулевой частоты.

На рис. 1.7 приведен график периодической функции, на рис. 1.8 — графики амплитуд и фаз действительных гармоник,

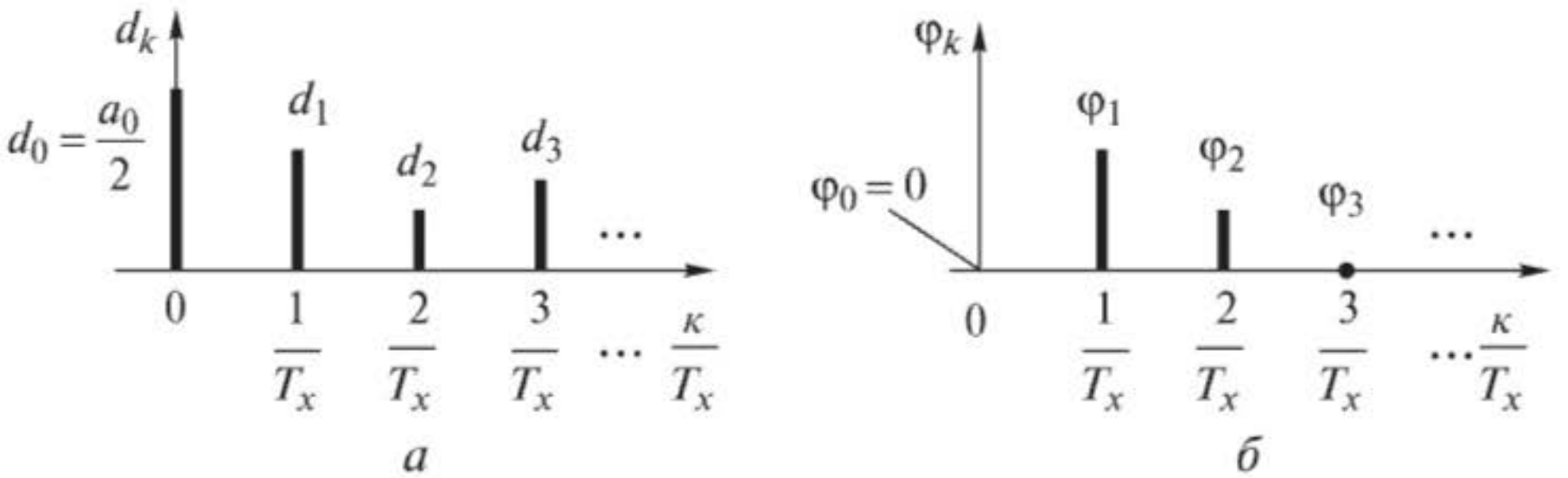


Рис. 1.8. Графики амплитуд $d_к$ (*а*) и фаз $\varphi_к$ (*б*) действительных гармоник периодической функции $s(x)$

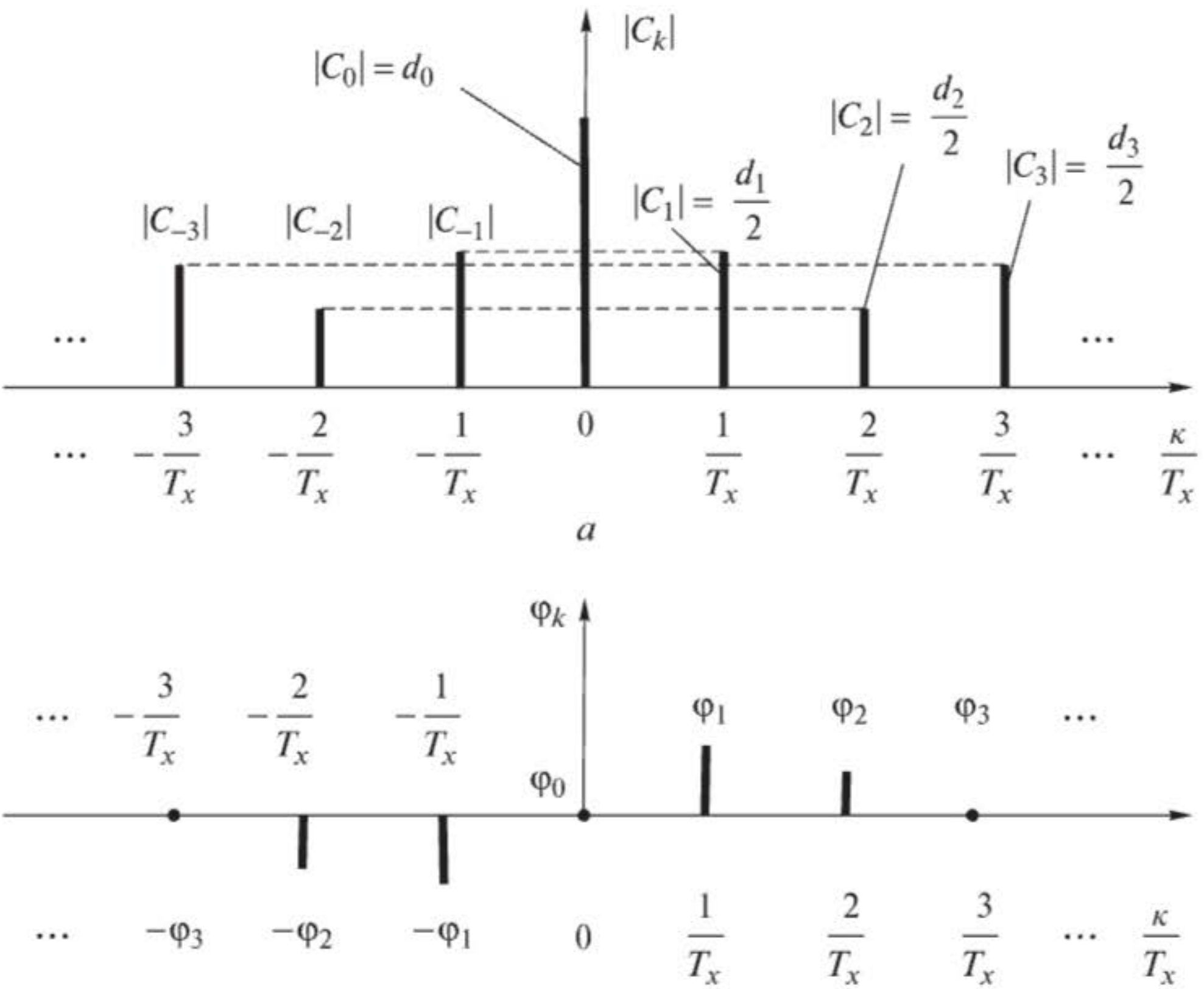


Рис. 1.9. Графики амплитуд $|C_к|$ (*а*) и фаз $\varphi_к$ (*б*) комплексных гармоник периодической функции $s(x)$

а на рис. 1.9 — амплитуд и фаз комплексных гармоник той же функции.

Для оптических сигналов имеют физический смысл как положительные, так и отрицательные пространственные координаты и, следовательно, положительные и отрицательные пространственные частоты.

1.2.3. Свойства ряда Фурье

1. Если функция $s(x)$ четная, т. е. $s(x) = s(-x)$, то ряд имеет вид

$$s(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\kappa=1}^{\infty} a_\kappa \cos\left(2\pi \frac{\kappa}{T_x} x\right). \qquad (1.13)$$

Здесь $a_0 = \frac{4}{T_x} \int_0^{\frac{T_x}{2}} s(x)dx$; $a_\kappa = \frac{4}{T_x} \int_0^{\frac{T_x}{2}} s(x)\cos\left(2\pi \frac{\kappa}{T_x} x\right)dx$; $b_\kappa = 0$;

$C_\kappa = \frac{1}{2} a_\kappa$ — действительное число.

Таким образом, четная функция раскладывается в ряд Фурье по косинусам.

2. Если функция $s(x)$ нечетная, т. е. $s(x) = -s(-x)$, то ряд имеет вид

$$s(x) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} b_\kappa \sin\left(2\pi \frac{\kappa}{T_x} x\right). \qquad (1.14)$$

Здесь $b_\kappa = \frac{4}{T_x} \int_0^{\frac{T_x}{2}} s(x)\sin\left(2\pi \frac{\kappa}{T_x} x\right)dx$; $a_0 = 0$; $C_\kappa = -\frac{1}{2} i b_\kappa$ — чисто мнимое число. Следовательно, нечетная функция разлагается в ряд Фурье по синусам.

Оптические сигналы, как правило, являются функциями нескольких переменных. Если функция нескольких переменных периодическая и удовлетворяет условиям Дирихле, то ее можно представить в виде многомерного ряда Фурье. Обычно многомерные ряды Фурье записывают в комплексном виде. Ряд Фурье для периодической функции двух переменных имеет вид

$$s\left(x+T_x, y+T_y\right)=\sum_{\kappa=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} C_{\kappa m}\exp\left[i\cdot 2\pi\left(\frac{\kappa}{T_x}x+\frac{m}{T_y}y\right)\right], \quad (1.15)$$

где $C_{\kappa m}=\dfrac{1}{T_xT_y}\int\limits_{-\frac{T_x}{2}}^{\frac{T_x}{2}}\int\limits_{-\frac{T_y}{2}}^{\frac{T_y}{2}} s(x, y\ )\exp\left[-i\cdot 2\ \left(\pi\frac{\kappa}{T_x}x+\frac{m}{T_y}y\right)\right]dx\ \ dy$

T_x, T_y — периоды функции $s(x, y$ по осям x, y;

$$\kappa=0, \pm 1, \pm 2 \ldots, \pm\infty;\ \ m=0, \pm 1, \pm 2, \pm \ldots, \pm\infty.$$

Если функция двух переменных является периодической по одной переменной, то она может быть разложена в ряд Фурье по этой переменной:

$$s(x, y\ )=s\left(x+T_x\ \ y\right)=\sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} C_{\kappa}\ (y\ )\exp\left(i\cdot 2\pi\frac{\kappa}{T_x}x\right), \quad (1.16)$$

где $C_{\kappa}(y)=\dfrac{1}{T_x}\int\limits_{-\frac{T_x}{2}}^{\frac{T_x}{2}} s(x, y\ )\exp\left(-i\cdot 2\pi\frac{\kappa}{T_x}x\right)dx\ \ ;\kappa=0, \pm 1, \pm 2, \pm \ldots, \pm\infty.$

В этом случае комплексная амплитуда $C_{\kappa}(y)$ является функцией от y.

На рис. 1.10 в качестве примера показан растр с полосовой структурой, периодический и неограниченный по оси абсцисс, который описывается функцией $s(x, y\ )=s\ (x+T_x, y)$.

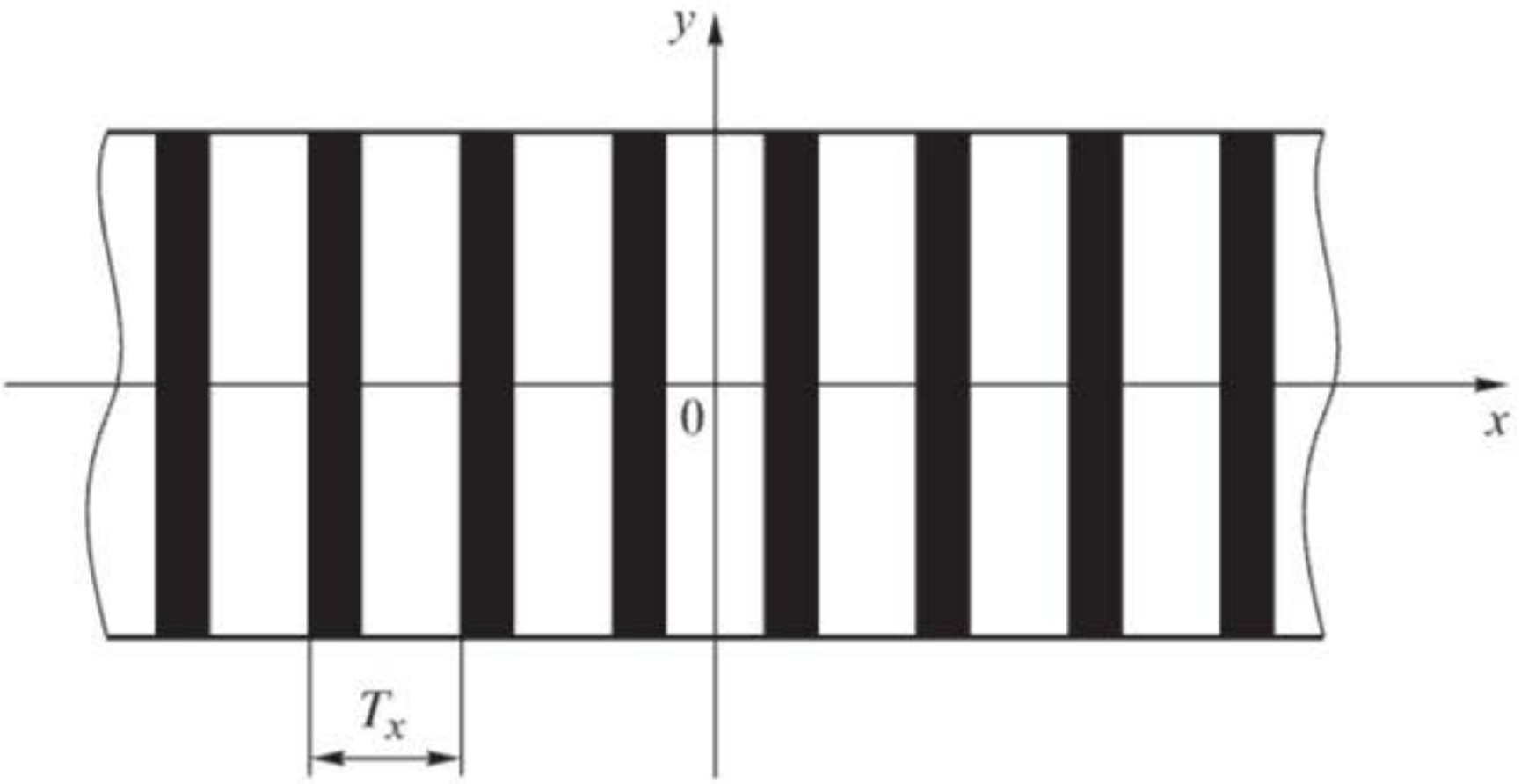


Рис. 1.10. Растр с полосовой структурой

1.3. Интеграл Фурье и преобразования Фурье

1.3.1. Вывод формул преобразования Фурье

Разложение Фурье может быть применено и к непериодическим функциям, удовлетворяющим условиям Дирихле: функция определена на всей числовой оси, имеет конечное число точек разрыва первого рода на каждом конечном участке и абсолютно интегрируема, т. е. $\int_{-\infty}^{\infty} |s(x)|dx < \infty$. Такая функция может быть представлена интегралом Фурье. На рис. 1.11 приведен график непериодической функции $s(x)$, удовлетворяющей условиям Дирихле. Вместо функции $s(x)$ используем вспомогательную функцию $s_1(x)$, которая является периодической (рис. 1.12) и на периоде совпадает с функцией $s(x)$: $s_1(x) = s(x)$ при $0 \le x \le T_x$, далее она повторяется на всех периодах.

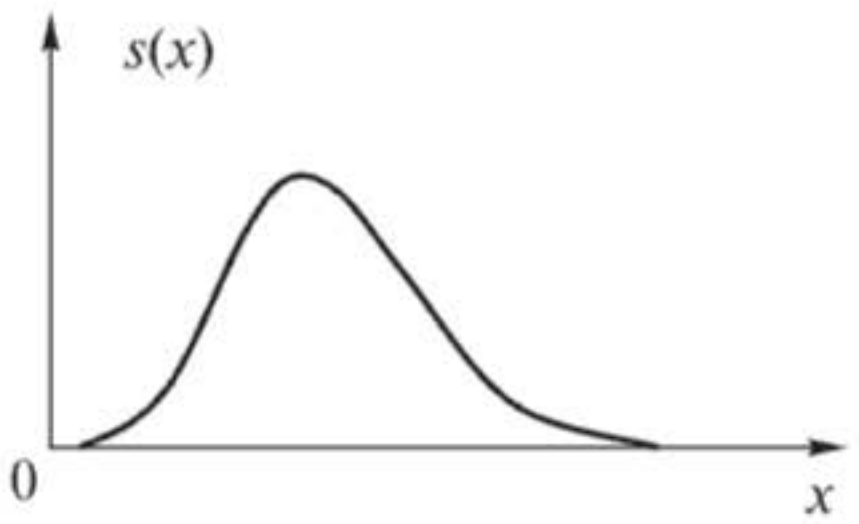


Рис. 1.11. Исходная функция $s(x)$

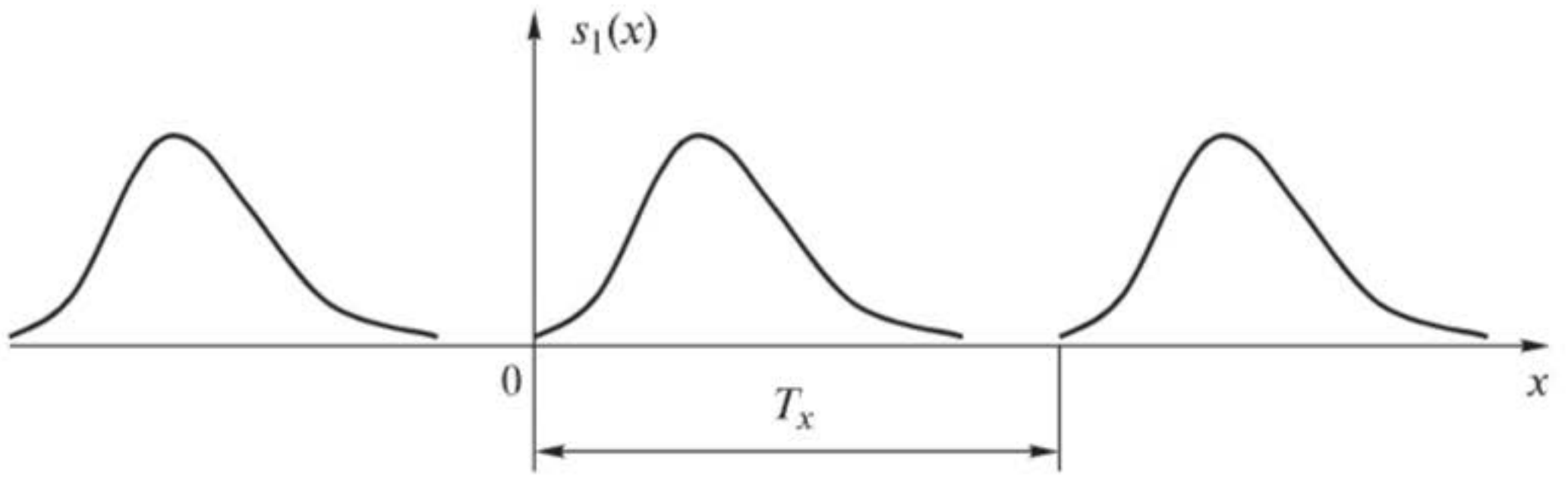


Рис. 1.12. Периодическая функция $s_1(x)$, совпадающая с функцией $s(x)$ на периоде T_x

Поскольку $s_1(x)$ является периодической функцией, то ее можно разложить в ряд Фурье:

$$s_1(x) = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} C_\kappa \exp\left(i \cdot 2\pi \frac{\kappa}{T_x} x \right), \qquad (1.17)$$

где

$$C_к = \frac{1}{T_x}\int\limits_{-\frac{T_x}{2}}^{\frac{T_x}{2}} s_1(x)\exp\left(-i\cdot 2\pi\frac{к}{T_x}x\right)dx. \qquad (1.18)$$

При $T_x \to \infty$ функция $s_1(x)$ в пределе становится равной $s(x)$ на бесконечном интервале $-\infty \le x \le \infty$. Учтем, что при $T_x \to \infty$ $\frac{1}{T_x} \to d\nu_x$, значение $\frac{к}{T_x} \to \nu_x$ превращается в текущее значение пространственной частоты, а суммирование в выражении (1.17) переходит в интегрирование. Соответственно при $T_x \to \infty$ для $C_к$ получаем следующее выражение:

$$C_к = \frac{1}{T_x}\int\limits_{\frac{-T_x}{2}}^{\frac{T_x}{2}} s_1(x)\exp\left(-i\cdot 2\pi\frac{к}{T_x}x\right)dx \to$$

$$\to \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} s(x)\exp(-i\cdot 2\pi\nu_x x)dx\right]d\nu_x = \tilde{s}(\nu_x)d\nu_x, \qquad (1.19)$$

где

$$\tilde{s}(\nu_x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} s(x)\exp(-i\cdot 2\pi\nu_x x)dx. \qquad (1.20)$$

Тогда с учетом (1.19) и (1.20) формула (1.17) принимает вид

$$s(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} s(u)\exp(-i\cdot 2\pi\nu_x u)du\right]\exp(i\cdot 2\pi\nu_x x)d\nu_x. \qquad (1.21)$$

Выражение (1.21) называется ***интегралом фурье-функции*** $s(x)$ в комплексной форме. Формулу (1.21), записанную в виде

$$s(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde{s}(\nu_x)\exp(i\cdot 2\pi\nu_x x)d\nu_x = F^{-1}\{\tilde{s}(\nu_x)\}, \qquad (1.22)$$

называют ***обратным преобразованием Фурье***, а формулу

$$\tilde{s}(\nu_x) = \int_{-\infty}^{\infty} s(x)\exp(-i \cdot 2\pi\nu_x x)dx = F\{s(x)\} \qquad (1.23)$$

— ***прямым преобразованием Фурье*** (***фурье-образ функции*** $s(x)$).

Функция $\tilde{s}(\nu_x)$ называется также **пространственно-частотным спектром** (ПЧС) функции $s(x)$.

Функции нескольких переменных, удовлетворяющие условиям Дирихле, также могут быть представлены интегралом Фурье. Для функции двух переменных имеем

$$\tilde{s}(\nu_x, \nu_y) = F\{s(x, y)\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} s(x, y)\exp(-i \cdot 2\pi[\nu_x x + \nu_y y])dxdy \qquad (1.24)$$

— прямое преобразование Фурье (фурье-образ функции $s(x, y)$), а

$$s(x, y) = F^{-1}\{\tilde{s}(\nu_x, \nu_y)\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{s}(\nu_x, \nu_y)\exp[i \cdot 2\pi(\nu_x x + \nu_y y)]d\nu_x d\nu_y \qquad (1.25)$$

— обратное преобразование Фурье.

Для функции трех переменных имеем

$$\tilde{s}(\nu_x, \nu_y, \nu_t) = F\{s(x, y, t)\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} s(x, y, t)\exp(-i \cdot 2\pi[\nu_x x + \nu_y y + \nu_t t])dxdydt \qquad (1.26)$$

— прямое преобразование Фурье,

$$s(x, y, t) = F^{-1}\{\tilde{s}(\nu_x, \nu_y, \nu_t)\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{s}(\nu_x, \nu_y, \nu_t)\exp(i \cdot 2\pi[\nu_x x + \nu_y y + \nu_t t])d\nu_x d\nu_y d\nu_t \qquad (1.27)$$

— обратное преобразование Фурье.

Для многомерных функций используется векторное представление аргументов прямого и обратного преобразований Фурье, которое позволяет упростить запись формул. Если некоторой точке с координатами x, y, t сопоставить вектор $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + t\vec{k}$, а точке частотного пространства — вектор $\vec{\nu}_r = \nu_x\vec{i} + \nu_y\vec{j} + \nu_t\vec{k}$, где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — ортогональные единичные векторы, то скалярное произведение этих векторов $\vec{r}\vec{\nu}_r = \nu_x x + \nu_y y + \nu_t t$. Тогда прямое и обратное преобразования Фурье можно представить в виде

$$F\{s(x, y, t)\} = F\{s(\vec{r})\} = \tilde{s}(\vec{\nu}_r) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\vec{r})\exp(-i \cdot 2\pi\vec{r}\vec{\nu}_r)dp, \quad (1.29)$$

где $dp = dxdydt$,

$$F^{-1}\{\tilde{s}(\nu_x, \nu_y, \nu_t)\} = F^{-1}\{\tilde{s}(\vec{\nu}_r)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{s}(\vec{\nu}_r)\exp(i \cdot 2\pi\vec{\nu}_r\vec{r})\,d\Sigma, \quad (1.30)$$

где $d\Sigma = d\nu_x d\nu_y d\nu_t$.

1.3.2. Свойства преобразования Фурье

Ниже приведены свойства, справедливые как для прямого, так и для обратного преобразований Фурье функций одной и нескольких переменных.

1. Линейность. Преобразование Фурье линейной комбинации нескольких функций равно линейной комбинации преобразований Фурье этих функций:

$$F\{a_1 s_1(x) + a_2 s_2(x)\} = a_1 F\{s_1(x)\} + a_2 F\{s_2(x)\} = \\ = a_1\tilde{s}_1(\nu_x) + a_2\tilde{s}_2(\nu_x), \quad (1.31)$$

где a_1, a_2 — комплексные или действительные числа.

2. Теорема смещения (запаздывания). Запишем

$$F\{s(x - x_0)\} = \tilde{s}(\nu_x)\exp(-i \cdot 2\pi\nu_x x_0), \quad (1.32)$$

где $F\{s(x)\} = \tilde{s}(\nu_x)$.

Доказательство:

$$F\{s(x-x_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} s(x-x_0)\exp(-i\cdot 2\pi\nu_x x)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} s(u)\exp\left[-i\cdot 2\pi(u+x_0)\nu_x\right]du =$$

$$= \exp(-i\cdot 2\pi\nu_x x_0)\int_{-\infty}^{\infty} s(u)\exp(-i\cdot 2\pi\nu_x u)du = \exp(-i\cdot 2\pi\nu_x x_0)\tilde{s}(\nu_x).$$

При выводе формулы была проведена замена переменной: $u = x - x_0$.

3. Обратная теорема смещения. Запишем

$$F\{s(x)\exp(-i\cdot 2\pi\nu_{x0}x)\} = \tilde{s}(\nu_x + \nu_{x0}), \qquad (1.33)$$

где $\tilde{s}(\nu_x) = F\{s(x)\}$.

Доказательство:

$$F\{s(x)\exp(-i\cdot 2\pi\nu_{x0}x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} s(x)\exp(-i\cdot 2\pi\nu_{x0}x)\exp(-i\cdot 2\pi\nu_x x)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} s(x)\exp(-i\cdot 2\pi(\nu_x+\nu_{x0})x)dx = \tilde{S}(\nu_x+\nu_{x0}).$$

4. Теорема изменения масштаба (теорема подобия). Запишем

$$F\{s(ax)\} = \frac{1}{|a|}\tilde{s}\left(\frac{\nu_x}{a}\right). \qquad (1.34)$$

Доказательство:

1) пусть a — положительное число $(a>0;\ a=|a|)$, тогда

$$F\{s(ax)\} = \int_{-\infty}^{\infty} s(ax)\exp(-i\cdot 2\pi\nu_x x)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} s(u)\exp\left(-i\cdot 2\pi\frac{\nu_x}{a}u\right)\frac{1}{a}du = \frac{1}{|a|}\tilde{s}\left(\frac{\nu_x}{a}\right).$$

При выводе использована замена переменной: $ax = u$, $du = adx$;

2) пусть a — отрицательное число $\left(a < 0;\ -a = |a|\right)$. При $ax = u$, $du = adx$

$$F\{s(ax)\} = \int_{-\infty}^{\infty} s(ax)\exp(-i \cdot 2\pi\nu_x x)dx = \int_{\infty}^{-\infty} s(u)\exp\left(-i \cdot 2\pi\frac{\nu_x}{a}u\right) \times$$

$$\times \frac{1}{a}du = -\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} s(u)\exp\left(-i \cdot 2\pi\frac{\nu_x}{a}u\right)du = \frac{1}{|a|}\tilde{s}\left(\frac{\nu_x}{a}\right).$$

При выводе учтено, поскольку $a < 0$, то при замене переменной $ax = u$ пределы интегрирования изменяют знаки.

Из этого свойства следует, что растяжение $\left(|a| < 1\right)$ или сжатие $\left(|a| > 1\right)$ функции $s(x)$ в координатной области приводит соответственно к сжатию или растяжению ее фурье-образа в частотной области. Особый интерес представляет случай, когда $a = -1$. При этом $F\{s(-x)\} = \tilde{s}(-\nu_x)$.

5. Преобразование Фурье от комплексно-сопряженной функции. Если $s(x) = s_1(x) + is_2(x)$ — комплексная функция действительного переменного, а $s^*(x) = s_1(x) - is_2(x)$ — комплексно-сопряженная функция, то справедливо равенство

$$F\{s^*(x)\} = \tilde{s}^*(-\nu_x). \qquad (1.35)$$

Доказательство:

$$F\{s^*(x)\} = \tilde{s}^*(-\nu_x) = \int_{-\infty}^{\infty} s^*(x)\exp(-i \cdot 2\pi\nu_x x)dx =$$

$$= \left\{\left[\int_{-\infty}^{\infty} s^*(x)\exp(-i \cdot 2\pi\nu_x x)dx\right]^*\right\}^* =$$

$$= \left[\int_{-\infty}^{\infty} s(x)\exp(-i \cdot 2\pi(-\nu_x)x)dx\right]^* = \tilde{s}^*(-\nu_x).$$

Рассмотрим частные случаи:

а) если $s(x)$ — действительная функция, т. е. $s(x) = s^*(x)$, то $\tilde{s}^*(-\nu_x) = \tilde{s}(\nu_x)$ или $\tilde{s}^*(\nu_x) = \tilde{s}(-\nu_x)$ (свойство эрмитовости);

б) если $s(x)$ — действительная и четная функция, т. е.

$$s(x) = s^*(x) = s(-x) = s^*(-x),$$

то

$$\tilde{s}(\nu_x) = \tilde{s}^*(-\nu_x) = \tilde{s}(\nu_x) = \tilde{s}^*(\nu_x),$$

т. е. $\tilde{s}(\nu_x)$ — также действительная и четная функция;

в) если $s(x)$ — действительная и нечетная функция, т. е.

$$s(x) = s^*(x) = -s(-x) = -s^*(-x),$$

то

$$\tilde{s}(\nu_x) = \tilde{s}^*(-\nu_x) = -\tilde{s}(-\nu_x) = -\tilde{s}^*(\nu_x),$$

т. е. $\tilde{s}(\nu_x)$ — чисто мнимая и нечетная функция.

Доказательство:

Пусть $\tilde{s}(\nu_x) = \tilde{s}_1(\nu_x) + i\tilde{s}_2(\nu_x)$,

тогда

$$\tilde{s}(\nu_x) = \tilde{s}_1(\nu_x) + i\tilde{s}_2(\nu_x) = -\tilde{s}_1(-\nu_x) - i\tilde{s}_2(-\nu_x) = -\tilde{s}_1(\nu_x) + i\tilde{s}_2(\nu_x).$$

Отсюда следует, что $\tilde{s}_1(\nu_x) = 0$, а $i\tilde{s}_2(\nu_x) = \tilde{s}(\nu_x)$ — чисто мнимая нечетная функция.

6. Свойство взаимности. Если $\tilde{s}(\nu_x)$ — фурье-образ функции $s(x)$, то повторное применение прямого преобразования Фурье дает исходную функцию от отрицательного аргумента.

Доказательство:

$$F\{\tilde{s}(\nu_x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{s}(\nu_x)\exp(-i\cdot 2\pi\nu_x x)d\nu_x =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{s}(\nu_x)\exp[i\cdot 2\pi\nu_x(-x)]d\nu_x = s(-x).$$

Если от функции $s(x)$ взять прямое преобразование Фурье, а затем — обратное, то получим исходную функцию.

Доказательство:

$$F^{-1}\left\{F\left\{s(x)\right\}\right\} = F^{-1}\left\{\tilde{s}(\nu_x)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{s}(\nu_x)\exp(i\cdot 2\pi\nu_x x)d\nu_x = s(x). \quad (1.36)$$

7. Преобразование Фурье от производной и интеграла функции. Рассмотрим частные случаи:

а) пусть существует производная функции $s'(x) = \dfrac{ds(x)}{dx}$, тогда

$$F\left\{s'(x)\right\} = i\cdot 2 \quad {}_x\tilde{s}\left({}_x\right). \qquad \pi\nu \quad \nu(1.37)$$

Доказательство:

Выполним интегрирование по частям, приняв, что $\exp(-i\cdot 2\pi\nu_x) = u,\ s'(x)dx = dv_x,$ тогда

$$F\left\{s'(x)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} s'(x)\exp(-i\cdot 2\pi\nu_x x)dx =$$

$$= s(x)\exp(-i\cdot 2\pi\nu_x x)\Big|_{-\infty}^{\infty} + i\cdot \mathbf{2}\pi\nu_x \int_{-\infty}^{\infty} s(x)\exp(-i\cdot 2\pi\nu_x x)dx =$$

$$= i\cdot 2\pi\nu_x \tilde{s}(\nu_x).$$

При выводе учтено, что функция $s(x)$ абсолютно интегрируема в бесконечных пределах, т. е. $\int_{-\infty}^{\infty} |s(x)|dx < \infty$, при $x \to \pm\infty$ $s(x) \to 0$, а также, что $\left|\exp(-i\cdot 2\pi\nu_x x)\right| = 1$;

б) пусть существует интеграл $\phi(x) = \int_{-\infty}^{x} s(u)du,$ тогда

$$F\left\{\phi(x)\right\} = \tilde{\phi}(\nu_x) = \frac{1}{i\cdot 2\pi\nu_x}\tilde{s}(\nu_x). \quad (1.38)$$

Доказательство:

Поскольку $\dfrac{d\phi(x)}{dx} = s(x),$ то $F\left\{s(x)\right\} = \tilde{s}(\nu_x) = i\cdot 2\pi\nu_x\tilde{\phi}(\nu_x).$

Отсюда $\tilde{\phi}(\nu_x) = \dfrac{1}{i\cdot 2\pi\nu_x}\tilde{s}(\nu_x).$

8. Преобразование Фурье от функций с разделяющимися переменными. Пусть $s(x, y) = s_1(x)s_2(y)$, тогда

$$F\{s(x, y)\} = \tilde{s}(\nu_x, \nu_y) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(x)\exp(-i \cdot 2\pi\nu_x x)dx \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} s_2(y)\exp(-i \cdot 2\pi\nu_y y)dy = \tilde{s}_1(\nu_x)\tilde{s}_2(\nu_y). \qquad (1.39)$$

Следовательно, фурье-образ функции с разделяющимися переменными равен произведению фурье-образов и соответствующих одномерных функций.

Предположим, что функция двух переменных рассматривается в пространстве трех переменных, т. е. она не зависит от третьей координаты:

$$s(x, y, t) = s(x, y).$$

Выведем формулу для преобразования Фурье от функции $s(x, y, t)$:

$$F\{s(x, y, t)\} = \tilde{s}(\nu_x, \nu_y, \nu_t) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} s(x, y)\exp\left[-i \cdot 2\pi(\nu_x x + \nu_y y + \nu_t t)\right]dxdydt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} s(x, y)\exp\left[-i \cdot 2\pi(\nu_x x + \nu_y y)\right]dxdy \int_{-\infty}^{\infty}\exp(-i2\pi\nu_t t)dt =$$

$$= \tilde{s}(\nu_x, \nu_y)\delta(\nu_t). \qquad (1.40)$$

При выводе формулы (1.40) учтено следующее свойство преобразования Фурье от константы (см. 1.4):

$$F\{1(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\exp(-i \cdot 2\pi\nu_t t)dt = \delta(\nu_t).$$

Если $s(x, y, t) = s(x)$, то

$$F\{s(x, y, t)\} = \tilde{s}(\nu_x, \nu_y, \nu_t) = \tilde{s}(\nu_x)\delta(\nu_y)\delta(\nu_t). \qquad (1.41)$$

Таким образом, если функция меньшего числа переменных рассматривается в пространстве большего числа переменных, то

фурье-образ такой функции в пространстве большего числа переменных равен произведению фурье-образа исходной функции и дельта-функций, соответствующих недостающим пространственным и временным переменным.

9. Преобразование Фурье от функций, обладающих осевой симметрией. Данные функции часто встречаются в оптике, так как большинство оптических систем представляет собой фигуры вращения. Если функция $s(x, y)$ обладает осевой симметрией, то в полярных координатах она зависит только от радиуса, так что

$$s(x, y) = s_1(\phi) = s_1(r).$$

В декартовой системе координат преобразование Фурье функции $s(x, y)$ имеет вид

$$F\{s(x, y)\} = \tilde{s}(\nu_x, \nu_y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} s(x, y)\exp\left[-i\cdot 2\pi(\nu_x x + \nu_y y)\right]dxdy.$$

Переходя к полярной системе координат, получаем

$$\tilde{s}_1(\nu_r, \theta) = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} s_1(r)\exp\left[-i\cdot 2\pi(\nu_r r\cos\phi\cos\theta + \nu_r r\sin\phi\sin\theta)\right]rdrd\phi,$$

где

$$x = r\cos\phi;\ \ y = r\sin\phi;\ \ \nu_x = \nu_r\cos\theta;\ \ \nu_y = \nu_r\sin\theta;\ \ ds = dxdy = rdrd\phi.$$

После несложных преобразований для $\tilde{s}_1(\nu_r, \theta)$ имеем

$$\tilde{s}_1(\nu_r, \theta) = \int_0^{\infty} rs_1(r)\left\{\int_0^{2\pi}\exp\left[-i\cdot 2\pi\nu_r r\cos(\phi-\theta)\right]d\phi\right\}dr. \qquad (1.42)$$

Покажем, что интеграл в фигурных скобках может быть выражен через функцию Бесселя первого рода нулевого порядка. Действительно, сделав замену переменной $\gamma = \phi - \theta$, $d\gamma = d\phi$ и учитывая периодичность экспоненциальной функции, получаем

$$\int_0^{2\pi}\exp\left[-i\cdot 2\pi\nu_r r\cos(\phi-\theta)\right]d\phi = \int_{-\theta}^{2\pi-\theta}\exp\left[-i\cdot 2\pi\nu_r r\cos\gamma\right]d\gamma =$$

$$= \int_0^{2\pi}\exp\left[-i\cdot 2\pi\nu_r r\cos\gamma\right]d\gamma.$$

Из теории функций Бесселя известно, что функция Бесселя первого рода нулевого порядка определяется как

$$J_0(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp\left[\pm iz\cos\gamma\right] d\gamma. \qquad (1.43)$$

Тогда с учетом выражения (1.43) формулу (1.42) можно записать в следующем виде:

$$\tilde{s}_1(\nu_r) = \int_0^{\infty} r s_1(r) J_0(2\pi\nu_r r) dr. \qquad (1.44)$$

Полученное выражение называется ***преобразованием Ганкеля***. Обратное преобразование Фурье от функции $\tilde{s}_1(\nu_r)$, обладающей осевой симметрией, имеет вид

$$s_1(r) = F^{-1}\left\{\tilde{s}_1(\nu_r)\right\} = 2\pi\int_0^{\infty} \nu_r \tilde{s}_1(\nu_r) J_0(2\pi\nu_r r) d\nu_r. \qquad (1.45)$$

Рассмотрим **свойство изменения масштаба** для преобразования Ганкеля.

Вычислим преобразование Ганкеля функции $s(ar)$, если $F\{s(r)\} = \tilde{s}(\nu_r)$:

$$F\{s(ar)\} = \int_0^{\infty} r s(ar) J_0(2\pi\nu_r r)\, dr = \frac{1}{a^2}\int_0^{\infty} u s(u) J_0\left(2\pi\nu_r \frac{u}{a}\right) du = \frac{1}{a^2}\tilde{s}\left(\frac{\nu_r}{a}\right).$$

Таким образом,

$$F\{s(ar)\} = \frac{1}{a^2}\tilde{s}\left(\frac{\nu_r}{a}\right). \qquad (1.46)$$

При выводе формулы (1.46) была сделана замена переменной: $ar = u,\ dr = \frac{1}{a}du.$

1.4. Дельта-функция Дирака

Для описания точечных источников оптического излучения, точечных зарядов и т. д. используют понятие «дельта-функция», введенное в физику П. Дираком. Дельта-функция относится к так называемым сингулярным функциям.

1.4.1. Определение дельта-функции

Дельта-функцией $\delta(x-x_0)$ (рис. 1.13) называется функция, равная нулю всюду, кроме особой точки x_0, где она обращается в бесконечность. При этом интеграл от нее, распространенный на сколь угодно малый отрезок, равен единице.

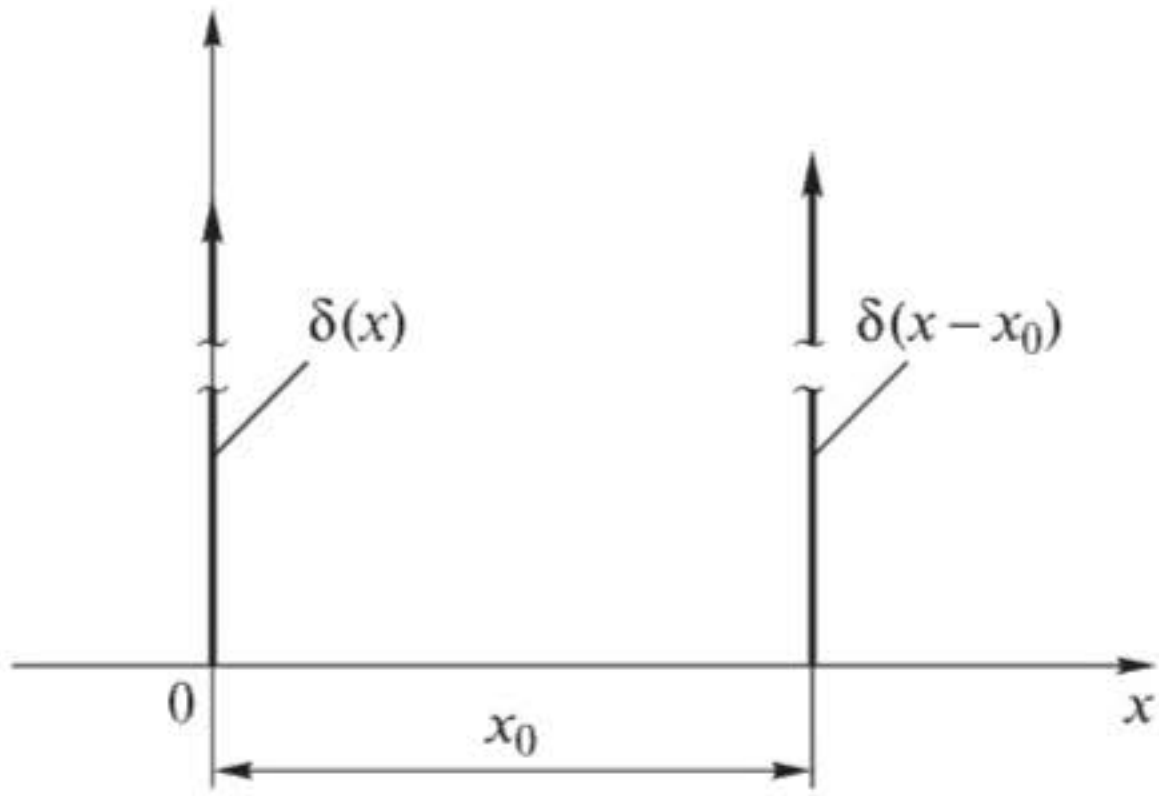


Рис. 1.13. Дельта-функция Дирака

Дельта-функция удовлетворяет следующим двум соотношениям:

$$\delta(x-x_0)=\begin{cases}\infty & \text{при } x=x_0;\\ 0 & \text{при } x\neq x_0,\end{cases} \tag{1.47}$$

$$\int_{x_0-\alpha}^{x_0+\alpha}\delta(x-x_0)dx=1 \text{ при любом } \alpha>0. \tag{1.48}$$

Кроме того, δ-функцию можно представить как предел последовательности импульсных функций. Рассмотрим пример такой последовательности. Пусть задана последовательность прямоугольных импульсов (рис. 1.14) $s_n(x)=\frac{n}{a}\text{rect}\left(\frac{nx}{a}\right)$, у которых при увеличении номера уменьшается ширина и увеличивается высота, так что площадь импульса остается постоянной и равной единице.

В частности, $s_1(x)=\begin{cases}\frac{1}{a} & \text{при } |x|\le a/2;\\ 0 & \text{при } |x|>a/2.\end{cases}$

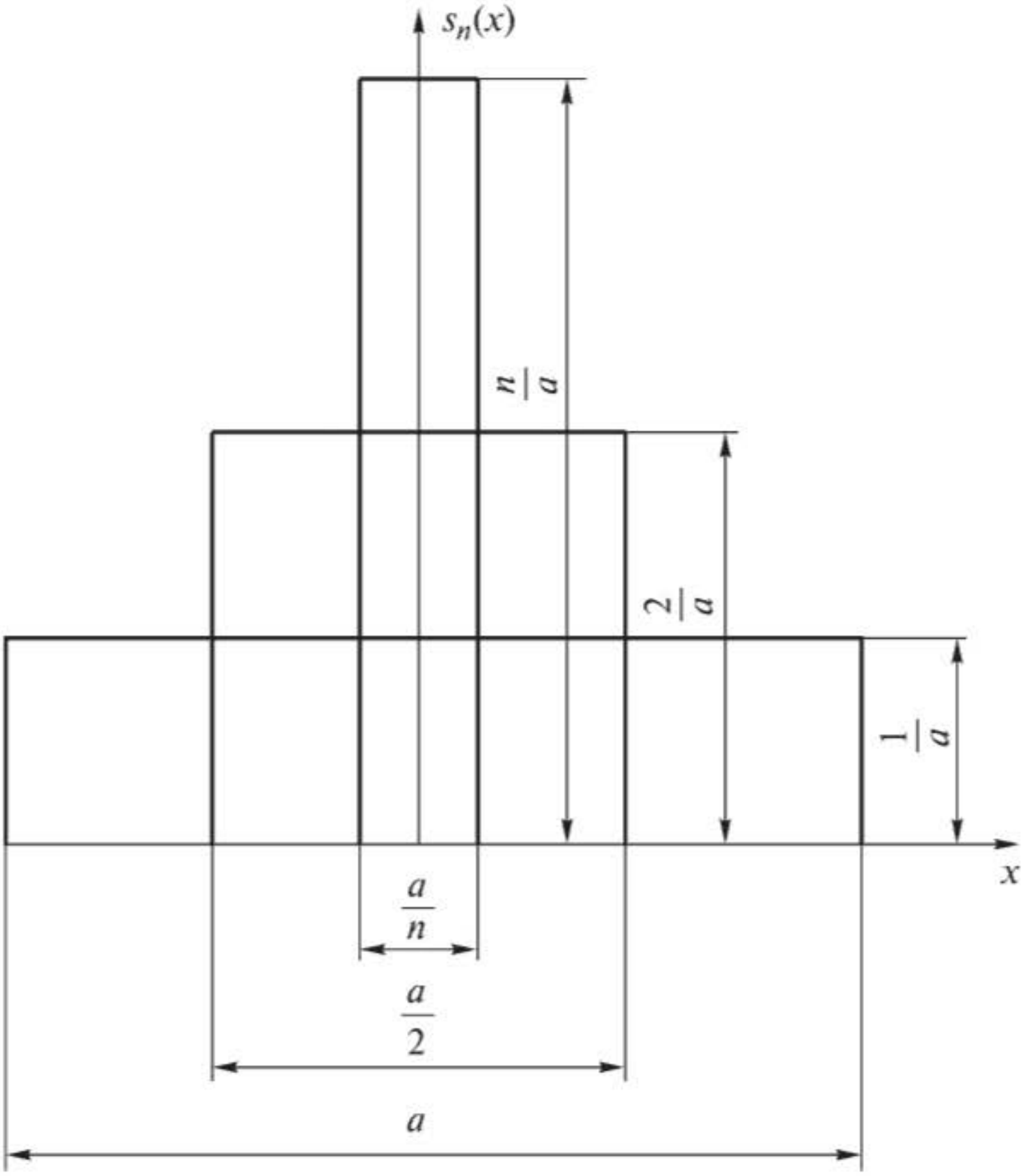


Рис. 1.14. Последовательность прямоугольных импульсов

Покажем, что последовательность $s_n(x)$ дельтообразна, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x) = \delta(x)$. Для этого проверим выполнение условий (1.47) и (1.48):

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \begin{cases} \infty & \text{при } x = x_0; \\ 0 & \text{при } x \neq x_0, \end{cases}$$

$$\int_{-a/2}^{a/2} s_n(x)dx = \frac{n}{a}\int_{-a/2}^{a/2} dx = \frac{n}{a}\left(\frac{a}{2n} + \frac{a}{2n}\right) = 1.$$

Поскольку условие (1.48) выполняется при любом n, то формально это условие справедливо для любого ε, а именно

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\left[\lim_{n\to\infty} s_n(x)\right]dx = 1.$$

Таким образом, δ-функцию можно рассматривать как предел последовательности прямоугольных импульсов, у которых при стремлении ширины импульса к нулю площадь остается неизменной и равной единице.

1.4.2. Основные свойства дельта-функции Дирака

1. Свойство симметрии. Дельта-функция является четной и симметричной относительно особой точки x_0, так что

$$\int_{-\infty}^{x_0}\delta(x-x_0)dx = \int_{x_0}^{\infty}\delta(x-x_0)dx = \frac{1}{2}. \qquad (1.49)$$

2. Фильтрующее свойство дельта-функции Дирака (рис. 1.15). Для любой функции $s(x)$, непрерывной в точке x_0, справедливо соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(x)\delta(x-x_0)dx = \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} s(x)\delta(x-x_0)dx = s(x_0). \qquad (1.50)$$

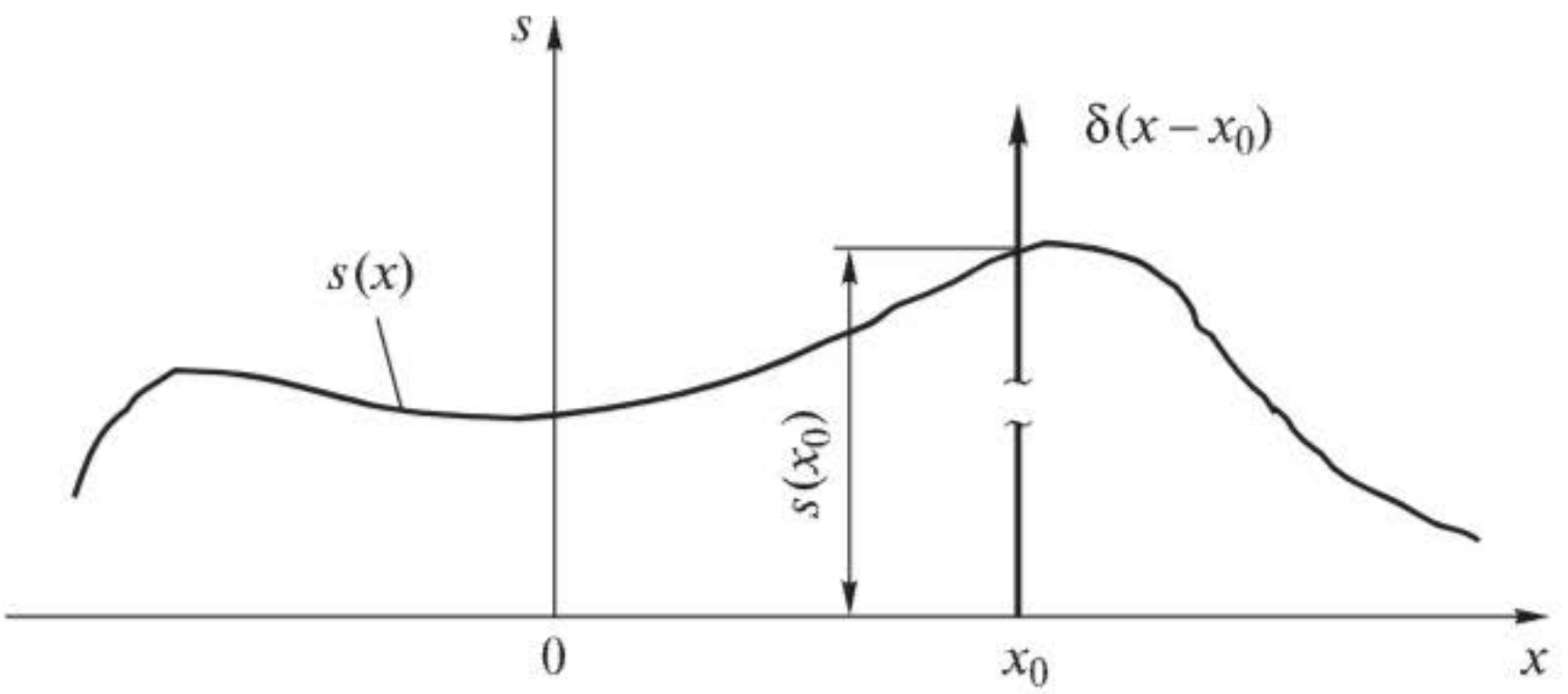


Рис. 1.15. Иллюстрация фильтрующего свойства δ-функции для функции $s(x)$, непрерывной в точке x_0

Если учесть, что $\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \delta(x-x_0)dx = 1$, то полученный результат можно записать в виде $s(x)\delta(x-x_0) = s(x_0)\delta(x-x_0)$.

Если точка x_0 является точкой разрыва первого рода (рис. 1.16) функции $s(x)$, то, разбивая область интегрирования на два интервала $-\infty < x \le x_0$ и $x_0 \le x < \infty$, получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(x)\delta(x-x_0)dx = \int_{-\infty}^{x_0} s(x)\delta(x-x_0)dx + \int_{x_0}^{\infty} s(x)\delta(x-x_0)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[s(x_0-0)+s(x_0+0)\right]. \qquad (1.51)$$

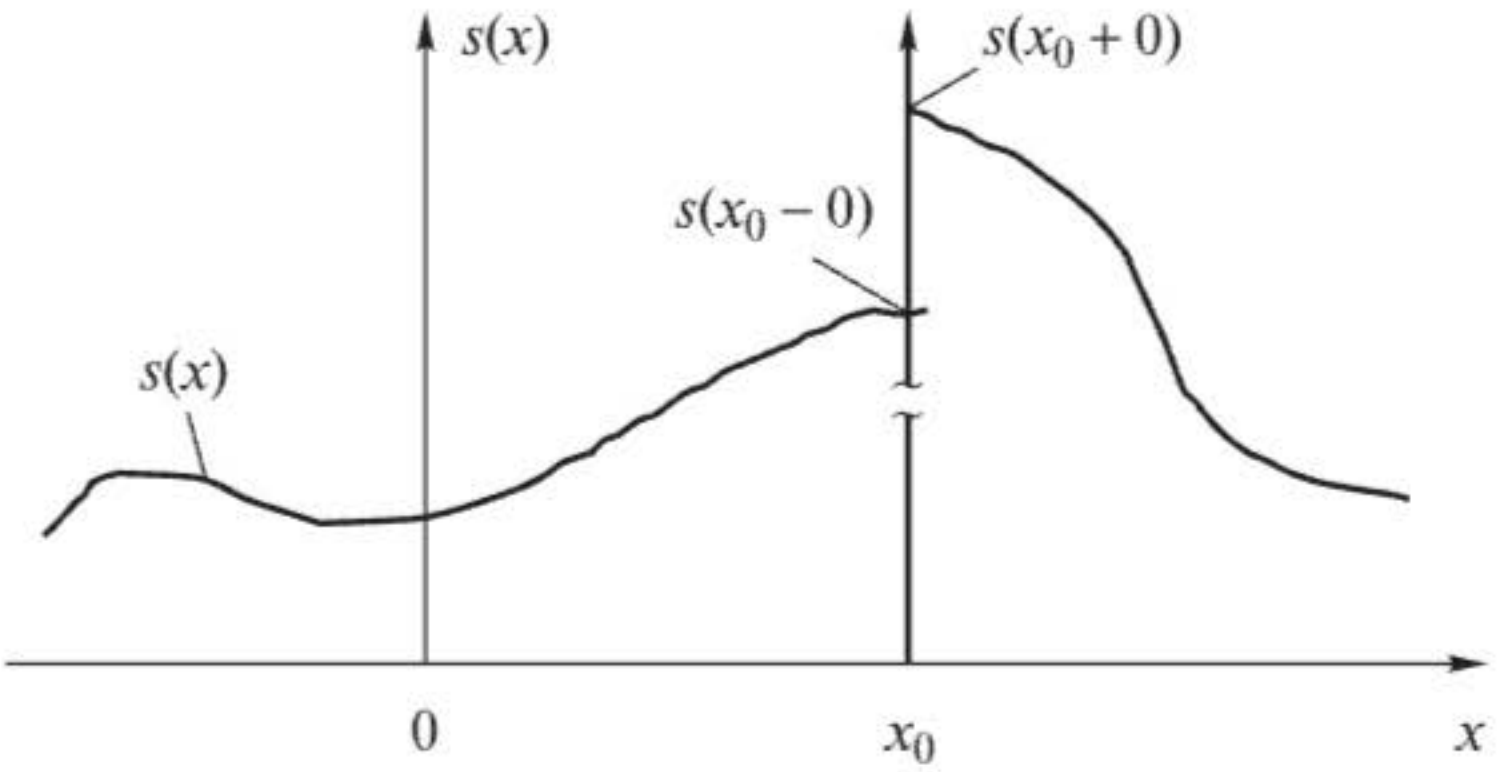


Рис. 1.16. Иллюстрация фильтрующего свойства δ-функции для функции $s(x)$, имеющей разрыв в точке x_0

1.4.3. Фурье-образ дельта-функции Дирака

На основании фильтрующего свойства (1.50) δ-функции можно записать

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0)\exp(-i\cdot 2\pi\nu_x x)dx = F\left\{\delta(x-x_0)\right\} =$$

$$= \exp(-i\cdot 2\pi\nu_x x_0). \qquad (1.52)$$

При $x_0 = 0$ имеем $F\left\{\delta(x)\right\} = 1$. Это означает, что фурье-образ δ-функции $\delta(x)$ на всех частотах равен единице (рис. 1.17).

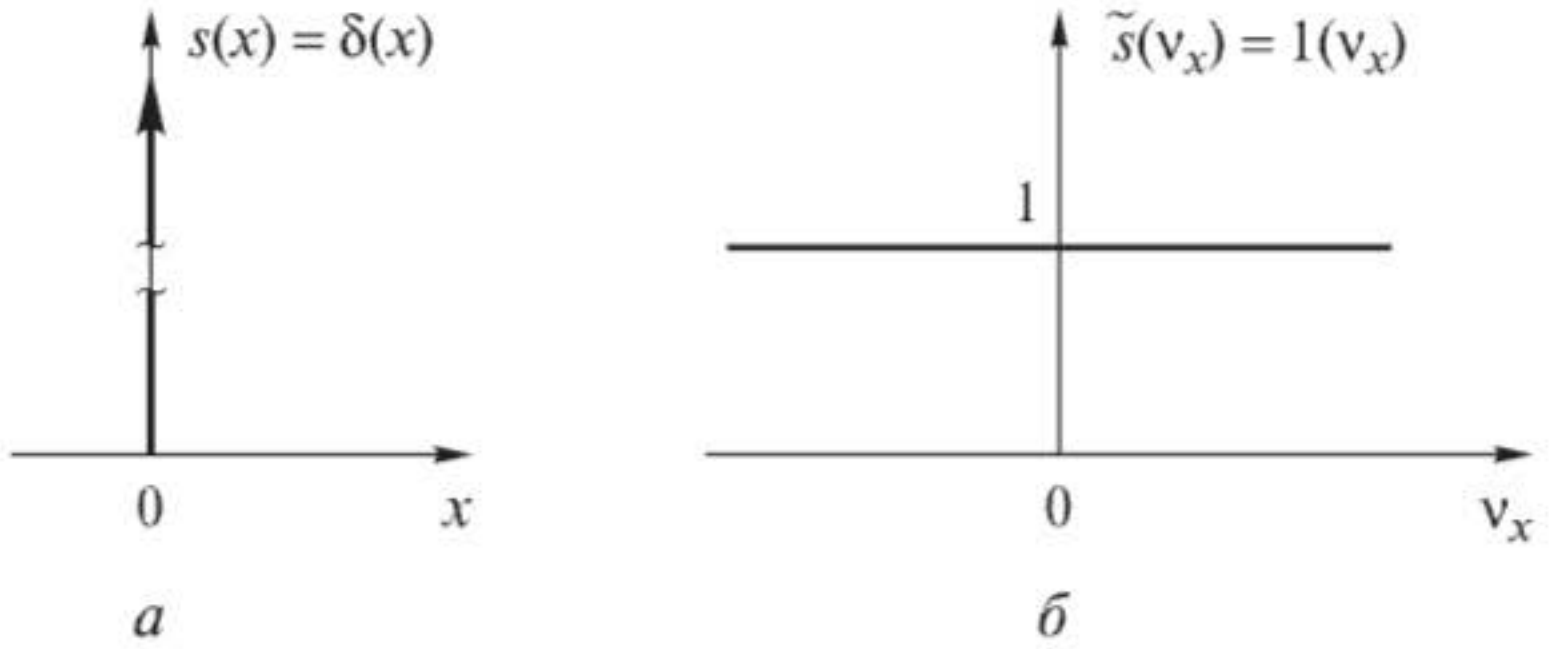


Рис. 1.17. Дельта-функция (*а*) и ее фурье-образ (*б*)

1.4.4. Преобразование Фурье от единичной функции

Пусть $s(x) = 1 = 1(x)$ — единичная функция (рис. 1.18). Тогда можно записать

$$F\{s(x)\} = \tilde{s}(\nu_x) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i \cdot 2\pi\nu_x x)\,dx =$$

$$= \lim_{\alpha\to\infty} \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \exp(-i \cdot 2\pi\nu_x x)\,dx = \lim_{\alpha\to\infty} \tilde{s}(\nu_x;\alpha);$$

$$\tilde{s}(\nu_x;\alpha) = \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \exp(-i \cdot 2\pi\nu_x x)\,dx = \frac{\exp(-i \cdot 2\pi\nu_x x)}{-i \cdot 2\pi\nu_x}\Bigg|_{-\alpha/2}^{\alpha/2} =$$

$$= \frac{1}{\pi\nu_x}\frac{\exp(i \cdot 2\pi\nu_x\alpha) - \exp(-i \cdot 2\pi\nu_x\alpha)}{2i} = \frac{\sin(\pi\nu_x\alpha)}{\pi\nu_x} =$$

$$= \frac{\alpha\sin(\pi\nu_x\alpha)}{\pi\nu_x\alpha} = \alpha\,\mathrm{sinc}(\pi\alpha\nu_x),$$

где $\mathrm{sinc}(z) = \dfrac{\sin(z)}{z}$.

Таким образом,

$$F\{s(x)\} = F\{1\} = \lim_{\alpha\to\infty}[\alpha\,\mathrm{sinc}(\pi\alpha\nu_x)] = \begin{cases}\infty, & \nu_x = 0;\\ 0, & \nu_x \neq 0.\end{cases}$$

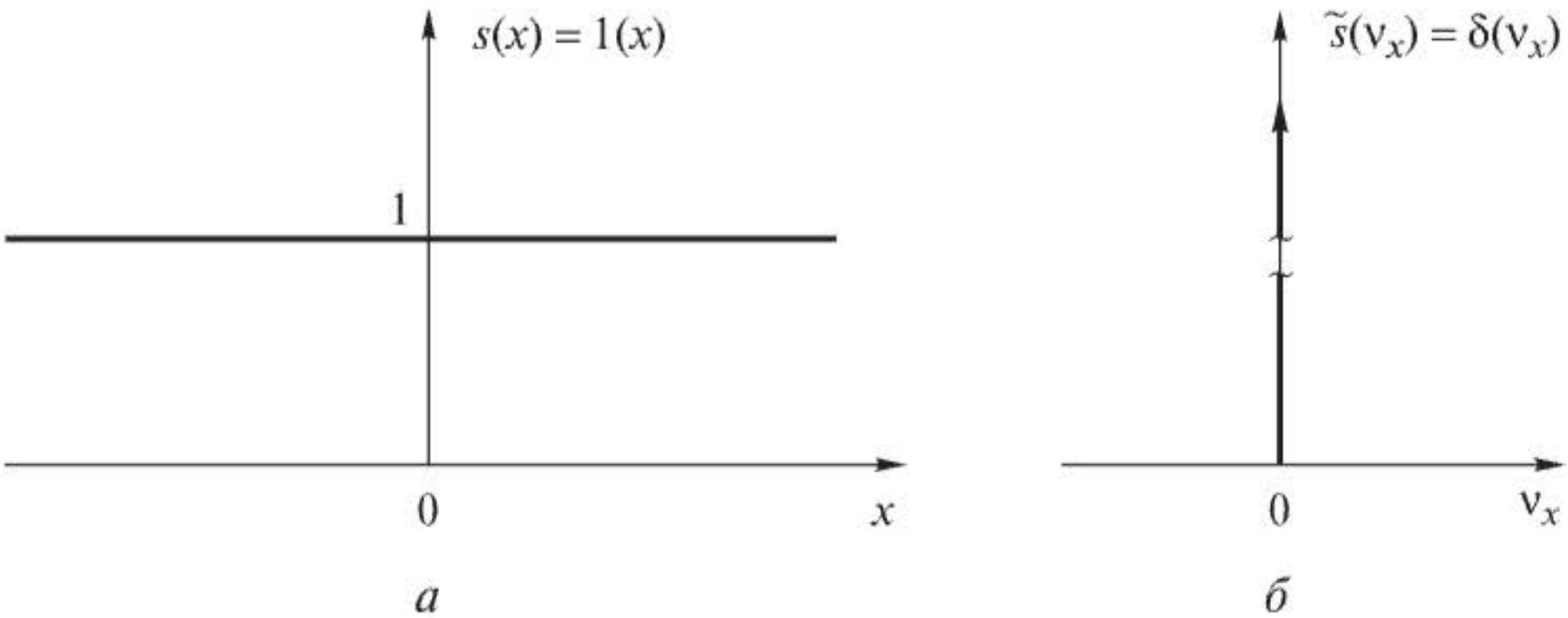


Рис. 1.18. Функция $1(x)$ (*а*) и ее фурье-образ (*б*)

Поскольку $\lim\limits_{\nu_x \to 0}\left[\operatorname{sinc}(\pi\alpha\nu_x)\right] = 1$ и, следовательно,

$$\lim_{\nu_x \to 0,\ \alpha\to\infty}\left[\alpha \operatorname{sinc}(\pi\alpha\nu_x)\right] \to \infty.$$

В то же время

$$\lim_{\nu_x \neq 0,\ \alpha\to\infty}\left[\alpha \operatorname{sinc}(\pi\alpha\nu_x)\right] = \lim_{\nu_x \neq 0,\ \alpha\to\infty} \frac{\sin(\pi\alpha\nu_x)}{\pi\nu_x} = 0.$$

Тогда, используя соотношение для интегрального синуса $\int\limits_0^\infty \frac{\sin ax}{x}dx = \frac{\pi}{2}$ при $\alpha > 0$, получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{s}(\nu_x;\alpha)d\nu_x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi\alpha\nu_x)}{\pi\nu_x}d\nu_x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin(\pi\alpha\nu_x)}{\nu_x}d\nu_x = \frac{2}{\pi}\frac{\pi}{2} = 1.$$

Таким образом, для предела последовательности $\alpha \operatorname{sinc}(\pi\alpha\nu_x)$ выполняются условия (1.47) и (1.48), т. е. указанная последовательность является дельтообразной последовательностью. Следовательно,

$$F\{1(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\cdot 2\pi\nu_x x)dx = \delta(\nu_x).$$

Таким образом, можно записать соотношения

$$F\{\delta(x)\} = 1; \tag{1.53}$$

$$\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\pm i \cdot 2\pi\nu_x x)\, d\nu_x; \tag{1.54}$$

$$\delta(\nu_x) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\pm i \cdot 2\pi\nu_x x)\, dx, \tag{1.55}$$

которые называются ***интегральными представлениями δ-функции***.

1.4.5. Фурье-образ двух дельта-функций, расположенных симметрично относительно начала координат

Пусть $s(x) = \delta(x - x_0) + \delta(x + x_0)$ (рис 1.19).

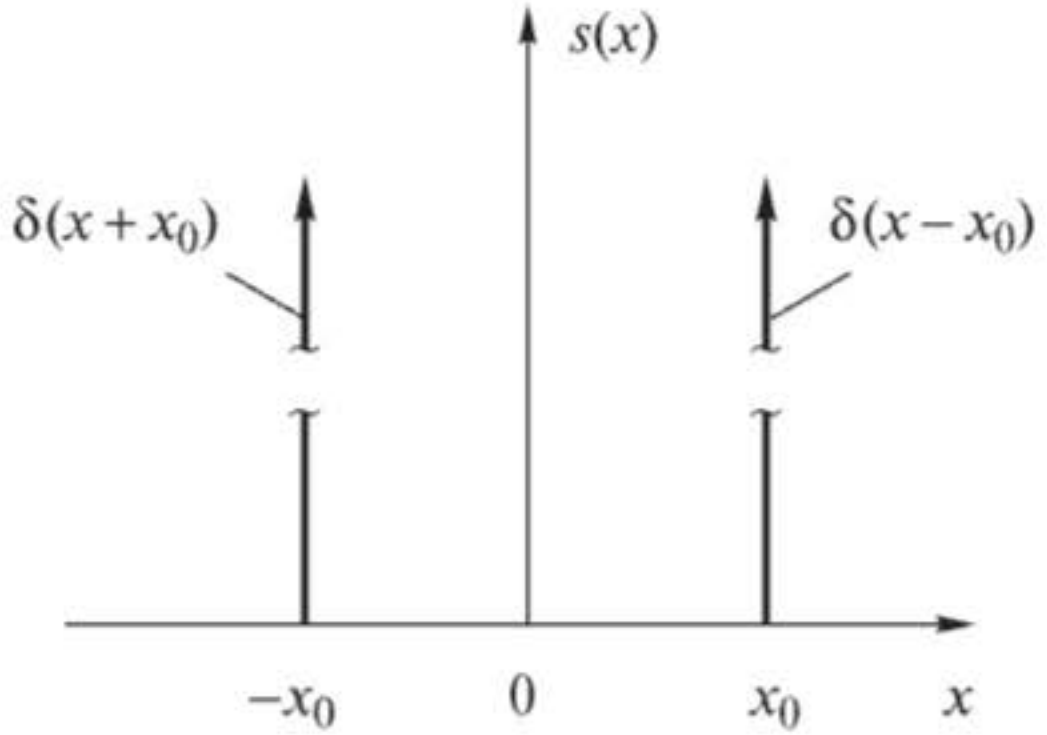


Рис. 1.19. Графики δ-функций, расположенных симметрично относительно начала координат

Фурье-образ этой функции имеет вид

$$F\{s(x)\} = F\{\delta(x - x_0) + \delta(x + x_0)\} =$$

$$= \exp(-i \cdot 2\pi\nu_x x_0) + \exp(i \cdot 2\pi\nu_x x_0) = 2\cos(2\pi\nu_x x_0). \tag{1.56}$$

1.4.6. Изменение масштаба дельта-функции

Пусть

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x). \tag{1.57}$$

Рассмотрим интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(x)\delta(ax)dx = \pm\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} s\left(\frac{u}{a}\right)\delta(u)du = \pm\frac{1}{a}s(0) = \frac{1}{|a|}s(0). \tag{1.58}$$

При выводе сделана замена переменной: $ax = u;\quad dx = \frac{1}{a}du.$ Знак «+» во втором интеграле соответствует случаю $a > 0$, знак «–» — случаю $a < 0$. Рассмотрим другой интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|a|}s(x)\delta(x)dx = \frac{1}{|a|}s(0). \tag{1.59}$$

Из сравнения выражений (1.58) и (1.59) следует, что $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x).$

1.4.7. Производные дельта-функции

Рассмотрим интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} s(x)\delta'(ax)dx$. Интегрируя это выражение по частям, получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(x)\delta'(x)dx = s(x)\delta(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} s'(x)\delta(x)dx =$$

$$= s(\infty)\delta(\infty) - s(-\infty)\delta(-\infty) - s'(0) = -s'(0). \tag{1.60}$$

В общем случае

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(x)\delta^{(n)}(x)dx = (-1)^n s^{(n)}(0). \tag{1.61}$$

Если производная $s^{(n)}(x)$ в точке $x=0$ имеет разрыв первого рода, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(x)\delta^{(n)}(x)dx = \frac{(-1)^n}{2}\left[s^{(n)}(-0)+s^{(n)}(+0)\right]. \qquad (1.62)$$

1.4.8. Дополнительные свойства дельта-функции

Ниже приведены дополнительные свойства дельта-функции:

а) $\delta'(-x) = -\delta'(x)$;

б) $x\delta(x) = 0$;

в) $x\delta'(x) = \delta(x)$;

г) $\delta\left(x^2 - x_0^2\right) = \frac{1}{2|x_0|}\left[\delta(x-x_0)+\delta(x+x_0)\right]$;

д) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0)\delta(x-x_1)dx = \delta(x_1-x_0)$.

Равенства а)–д) означают, что умножая левую и правую части каждого из них на непрерывную абсолютно интегрируемую функцию $s(x)$ и интегрируя по x, получаем одинаковые результаты.

Все приведенные выше соотношения обобщаются на случай нескольких переменных.

1.4.9. Дельта-функция двух переменных

Дельта-функция двух переменных определяется следующим образом:

$$\delta(x-x_0,\ y-y_0) = \delta(x-x_0)\,\delta(y-y_0) = \begin{cases} \infty & \text{при } x=x_0,\ y=y_0; \\ 0 & \text{при } x\neq x_0,\ y\neq y_0; \end{cases} \qquad (1.63)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0,\ y-y_0)dxdy = 1.$$

График δ-функции $\delta(x-x_0, y-y_0)$ двух переменных приведен на рис. 1.20.

Основные свойства δ-функции двух переменных:

а) фильтрующее свойство

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} s(x,y)\,\delta(x-x_0,\ y-y_0)\,dxdy = s(x_0,y_0); \qquad (1.64)$$

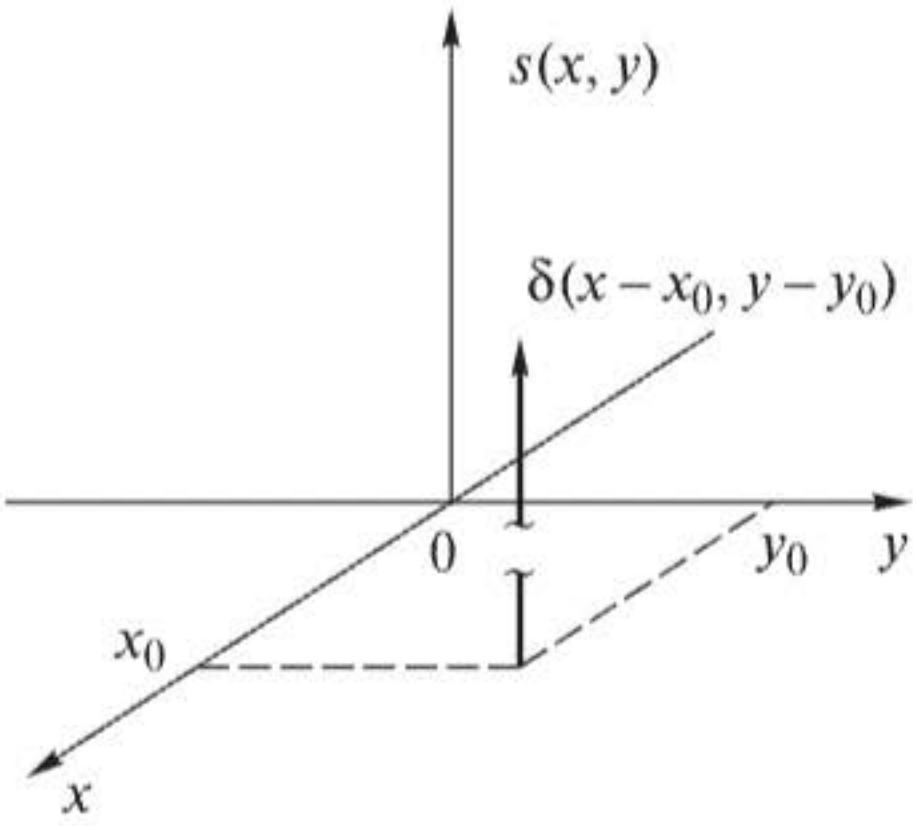


Рис. 1.20. Дельта-функция двух переменных

б) прямое и обратное преобразование Фурье δ-функции двух переменных

$$F\left\{\delta\left(x-x_0, y-y_0\right)\right\} = \exp\left[-i\cdot 2\pi\left(\nu_x x_0 + \nu_y y_0\right)\right]. \quad (1.65)$$

Следовательно, $F\left\{\delta(x, y)\right\} = 1$.

Интегральное представление δ-функции:

$$\delta\left(\nu_x, \nu_y\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\pm i\cdot 2\pi\left(\nu_x x + \nu_y y\right)\right] dx dy;$$

$$\delta(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\pm i 2\pi\left(\nu_x x + \nu_y y\right)\right] d\nu_x d\nu_y .$$

1.4.10. Преобразование Фурье от периодической функции

Пусть задана периодическая функция

$$s(x) = s\left(x + T_x\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \exp\left(i\cdot 2\pi\frac{kx}{T_x}\right), \quad (1.66)$$

где $k = 0, \pm 1, \ldots, \pm\infty$.

Вычислим преобразование Фурье от функции $s(x)$, использовав интегральное представление δ-функции:

$$\tilde{s}\left(\nu_x\right) = F\left\{s(x)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \exp\left(i\cdot 2\pi\frac{kx}{T_x}\right)\right]\exp\left(-i\cdot 2\pi\nu_x x\right)dx =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-i\cdot 2\pi x\left(\nu_x - \frac{k}{T_x}\right)\right]dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \delta\left(\nu_x - \frac{k}{T_x}\right). \quad (1.67)$$

Если задана периодическая функция двух переменных

$$s(x, y) = s(x + T_x, y + T_y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} C_{kl} \exp\left[i \cdot 2\pi \left(\frac{kx}{T_x} + \frac{ly}{T_y} \right) \right],$$

где $k, l = 0, \pm 1, \ldots, \pm \infty$, то фурье-образ такой функции будет иметь вид

$$\tilde{s}(\nu_x, \nu_y) = F\{s(x, y)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} C_{kl} \delta\left(\nu_x - \frac{k}{T_x}, \nu_y - \frac{l}{T_y} \right). \qquad (1.68)$$

1.4.11. Функция единичного скачка (функция Хевисайда)

Функция единичного скачка определяется выражением

$$X(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Функция Хевисайда связана с δ-функцией следующими соотношениями:

$$\frac{dX(x)}{dx} = \delta(x);$$

$$X(x) = \int_{-\infty}^{x} \delta(\xi) d\xi.$$

1.5. Гребенчатые функции

1.5.1. Гребенчатые функции одной переменной

Периодическая функция, состоящая из равноотстоящих дельта-функций с периодом $T_x = 1$, называется гребенчатой функцией и обозначается $\mathrm{comb}(x)$ (рис. 1.21). Следует отметить, что аргумент этой функции выражается в миллиметрах. Символическое обозначение гребенчатой функции

$$s(x) = \mathrm{comb}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - k). \qquad (1.69)$$

Функция $\mathrm{comb}(x)$ используется для описания операции дискретизации сигналов, а также для записи периодических функций.

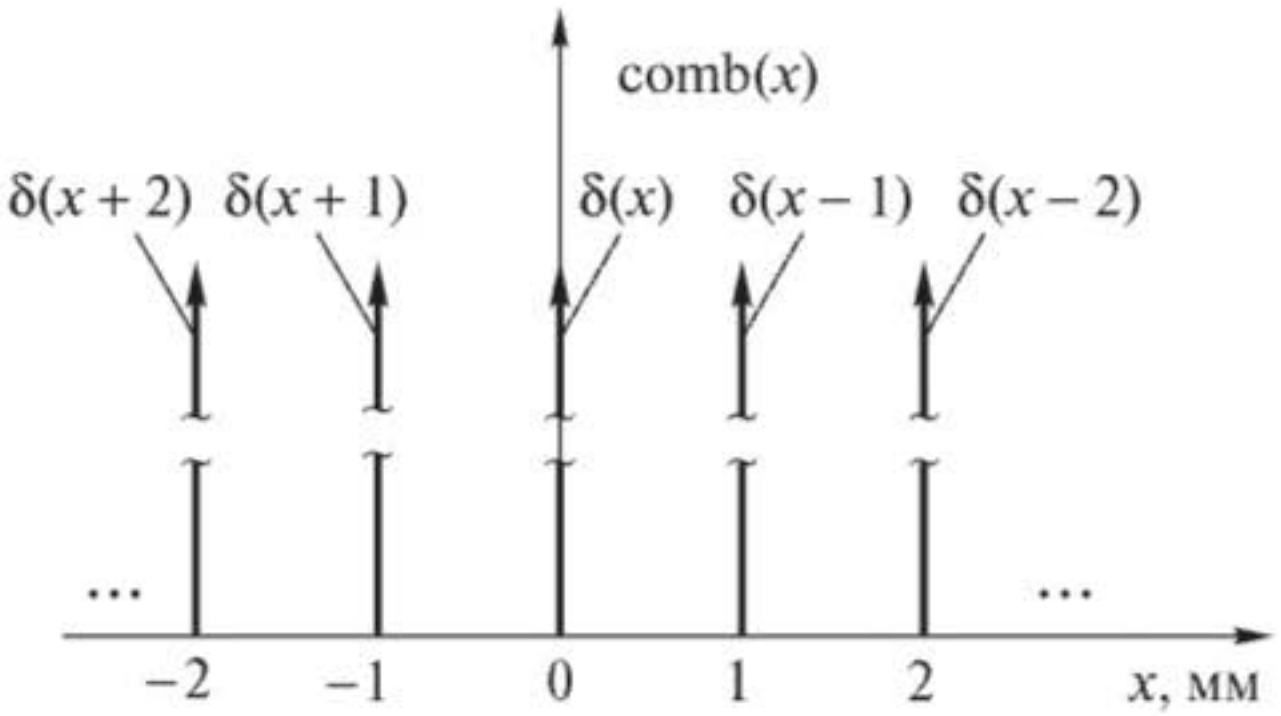


Рис. 1.21. Гребенчатая функция comb(x)

Найдем фурье-образ от функции comb(x). Поскольку функция comb(x) является периодической с периодом $T_x = 1$, то ее можно разложить в ряд Фурье:

$$\mathrm{comb}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \exp\left(i \cdot 2\pi \frac{k}{T_x} x\right) =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \exp(i \cdot 2\pi k x). \qquad (1.70)$$

Определим коэффициенты разложения этого ряда:

$$C_k = \frac{1}{T_x} \int_{-T_x/2}^{T_x/2} s(x) \exp\left(-i \cdot 2\pi \frac{k}{T_x} x\right) dx = \int_{-1/2}^{1/2} \delta(x) \exp(-i \cdot 2\pi k x) dx = 1.$$

Следовательно,

$$\mathrm{comb}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(i \cdot 2\pi k x). \qquad (1.71)$$

Найдем фурье-образ от функции comb(x):

$$F\{\mathrm{comb}(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(i \cdot 2\pi k x) \exp(-i \cdot 2\pi \nu_x x) \right] dx =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i \cdot 2\pi x (\nu_x - k)\right] dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\nu_x - k) = \mathrm{comb}(\nu_x). \qquad (1.72)$$

Получили также периодическую функцию с периодом, равным единице. График этой функции представлен на рис. 1.22.

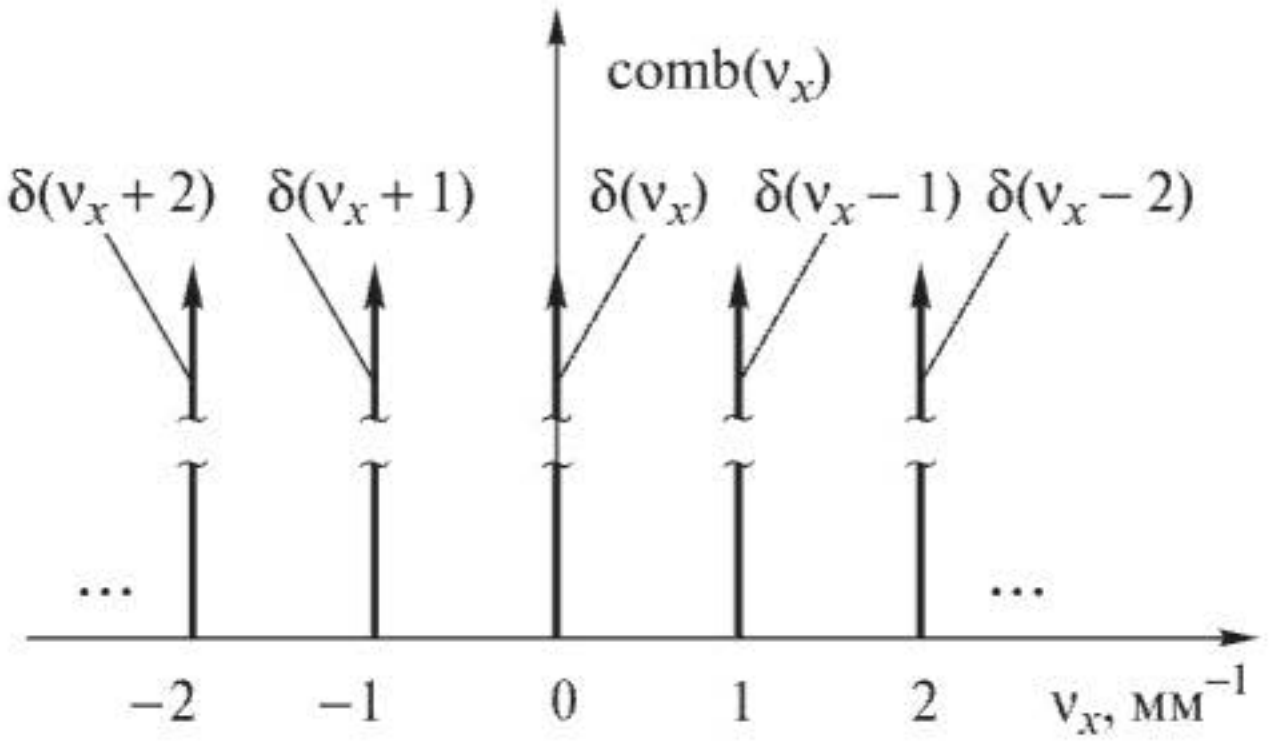


Рис. 1.22. Амплитудно-частотный спектр comb(ν_x)

Рассмотрим периодическую функцию, у которой период в общем случае не равен единице ($T_x > 0$):

$$s(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - kT_x). \tag{1.73}$$

Используя свойство изменения масштаба δ-функции, выразим эту функцию через функцию comb(x):

$$s(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - kT_x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left[T_x\left(\frac{x}{T_x} - k\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{T_x}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{x}{T_x} - k\right) = \frac{1}{T_x}\mathrm{comb}\left(\frac{x}{T_x}\right). \tag{1.74}$$

График периодической функции (1.73) в абсолютных единицах по оси абсцисс представлен на рис. 1.23, в относительных единицах — на рис. 1.24.

Найдем фурье-образ от функции $\frac{1}{T_x}\mathrm{comb}\left(\frac{x}{T_x}\right)$, используя свойство изменения масштаба:

$$F\left\{\frac{1}{T_x}\mathrm{comb}\left(\frac{x}{T_x}\right)\right\} = \mathrm{comb}(T_x\nu_x) =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(T_x\nu_x - m) = \frac{1}{T_x}\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(\nu_x - \frac{m}{T_x}\right). \tag{1.75}$$

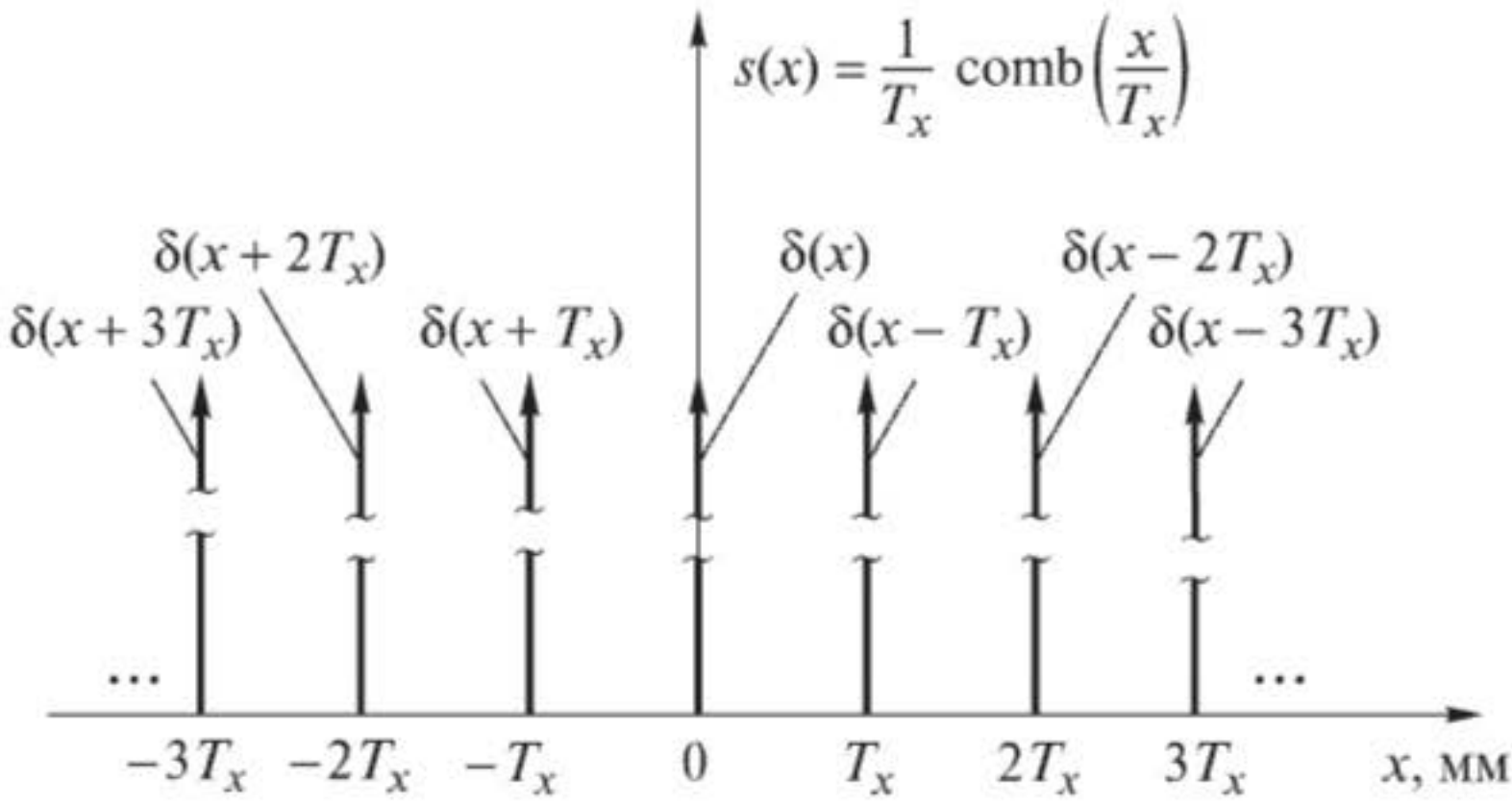


Рис. 1.23. Функция $s(x)$ с периодом в абсолютных единицах

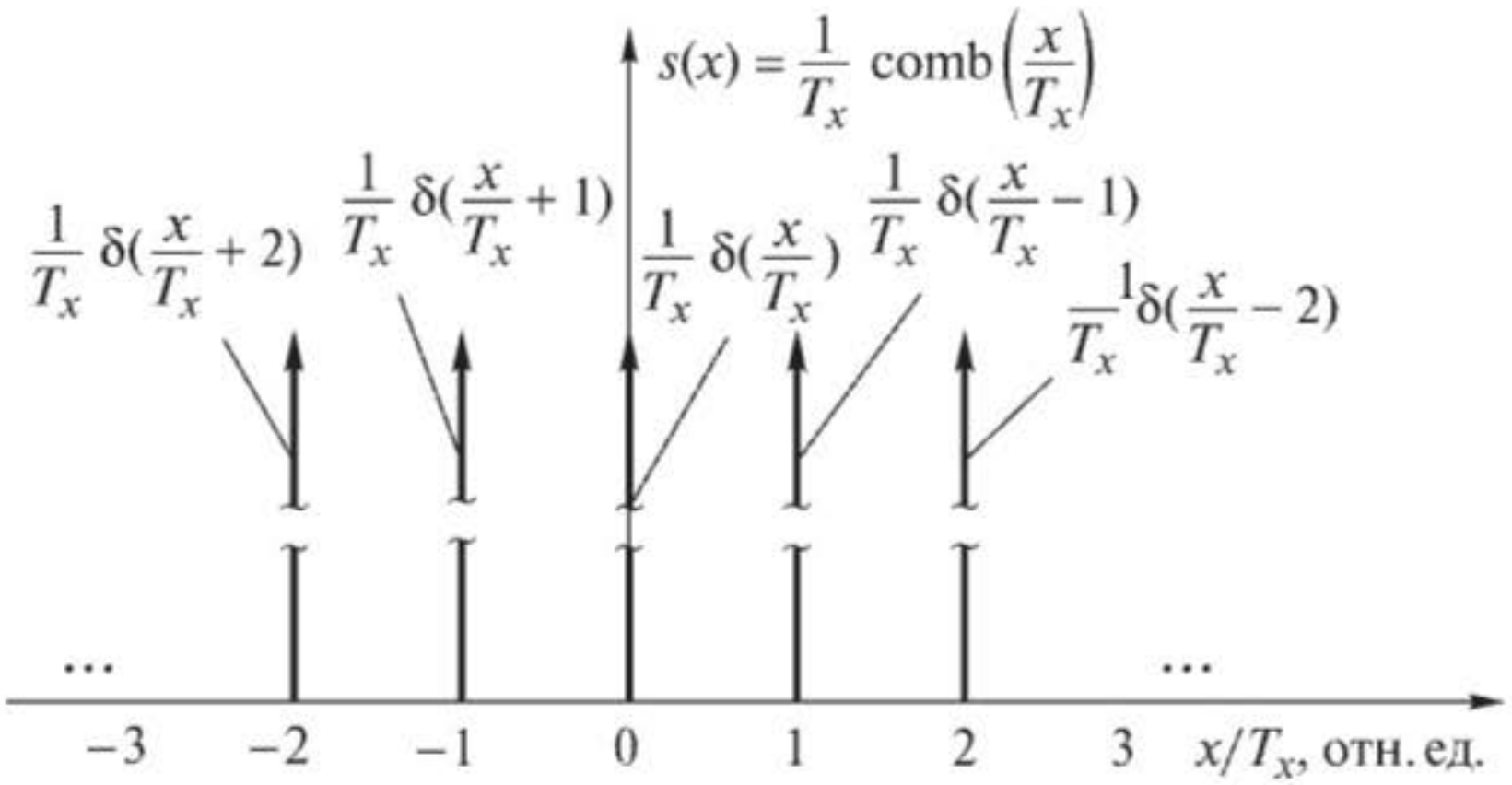


Рис. 1.24. Функция $s(x)$ с периодом в относительных единицах

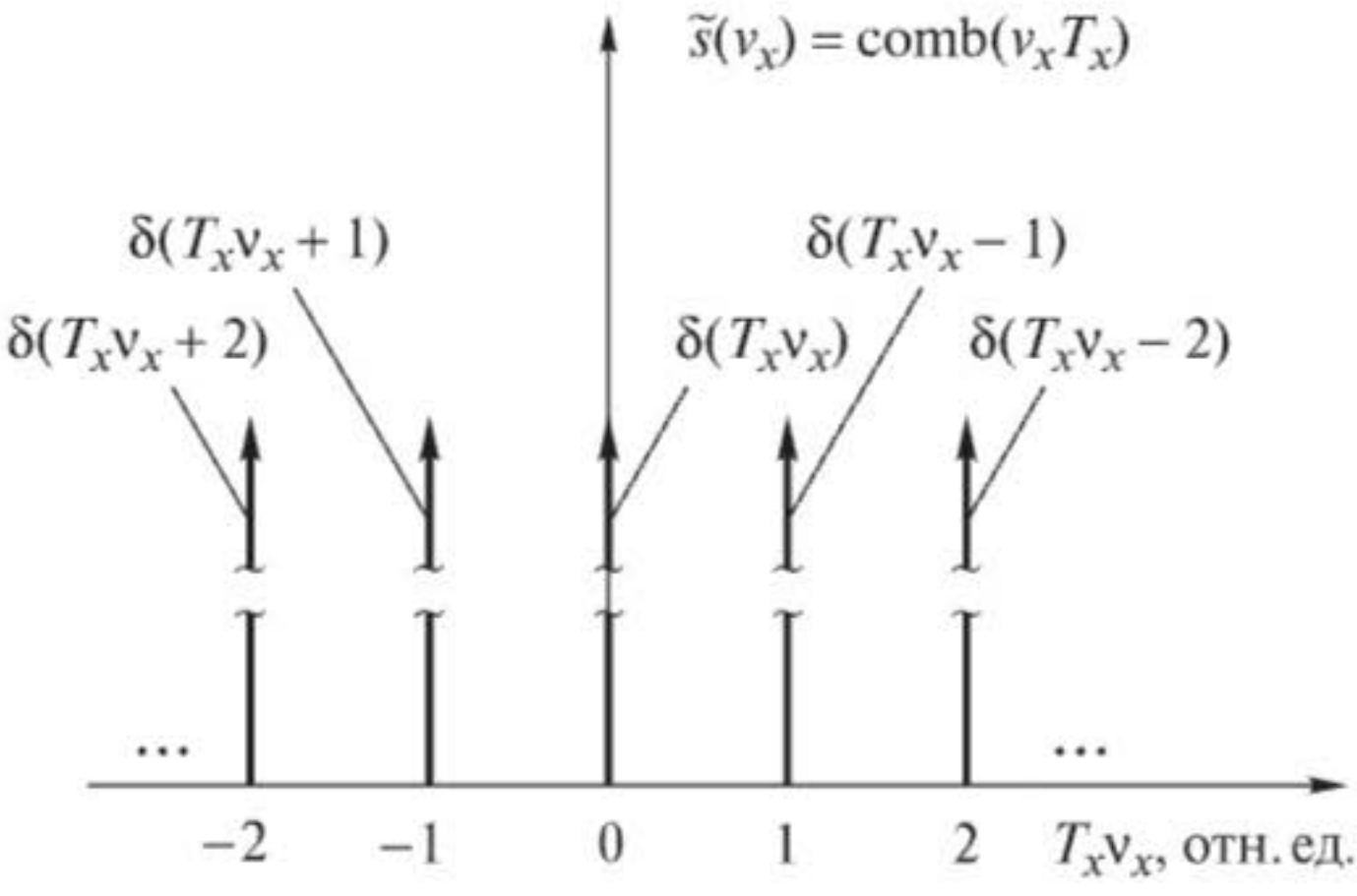


Рис. 1.25. Фурье-образ функции $s(x)$ в относительных единицах

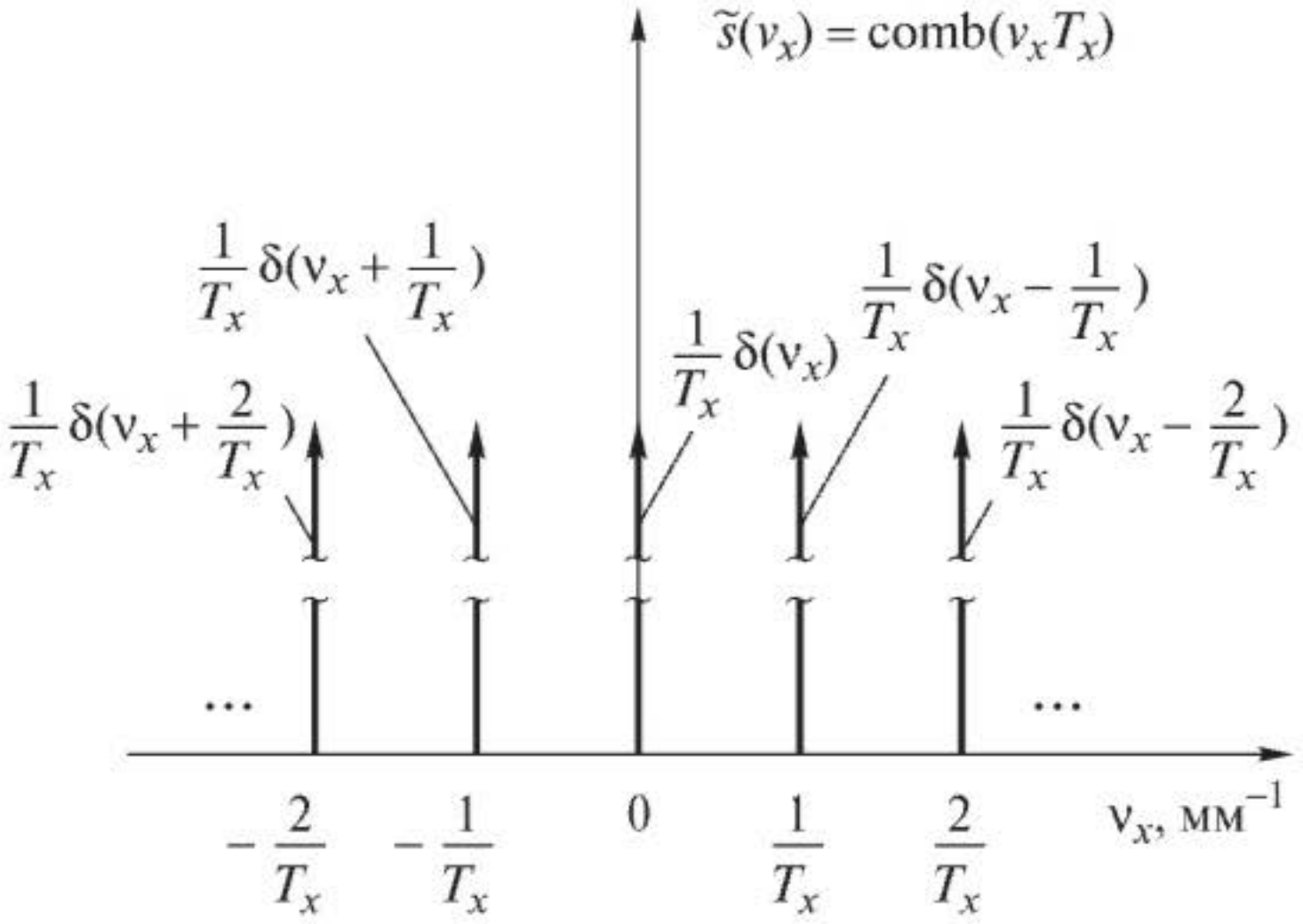


Рис. 1.26. Фурье-образ функции $s(x)$ в абсолютных единицах

Графики функции $\tilde{s}(\nu_x)$, выраженные в относительных и абсолютных единицах по оси абсцисс, представлены соответственно на рис. 1.25 и 1.26.

1.5.2. Гребенчатые функции двух переменных

Периодическая функция, состоящая из равноотстоящих по осям x и y δ-функций, называется гребенчатой функцией двух переменных. Период расположения δ-функций равен единице и измеряется в относительных единицах. Символическое обозначение этой функции имеет вид

$$s(x, y) = \mathrm{comb}(x, y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(x-k, y-l). \qquad (1.76)$$

График гребенчатой функции двух переменных приведен на рис. 1.27.

Функция $s(x, y)$ может быть представлена рядом Фурье:

$$s(x, y) = \mathrm{comb}(x, y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} \exp\left[i \cdot 2\pi(kx + ly)\right]. \qquad (1.77)$$

Фурье-образ функции $\mathrm{comb}(x, y)$ имеет вид

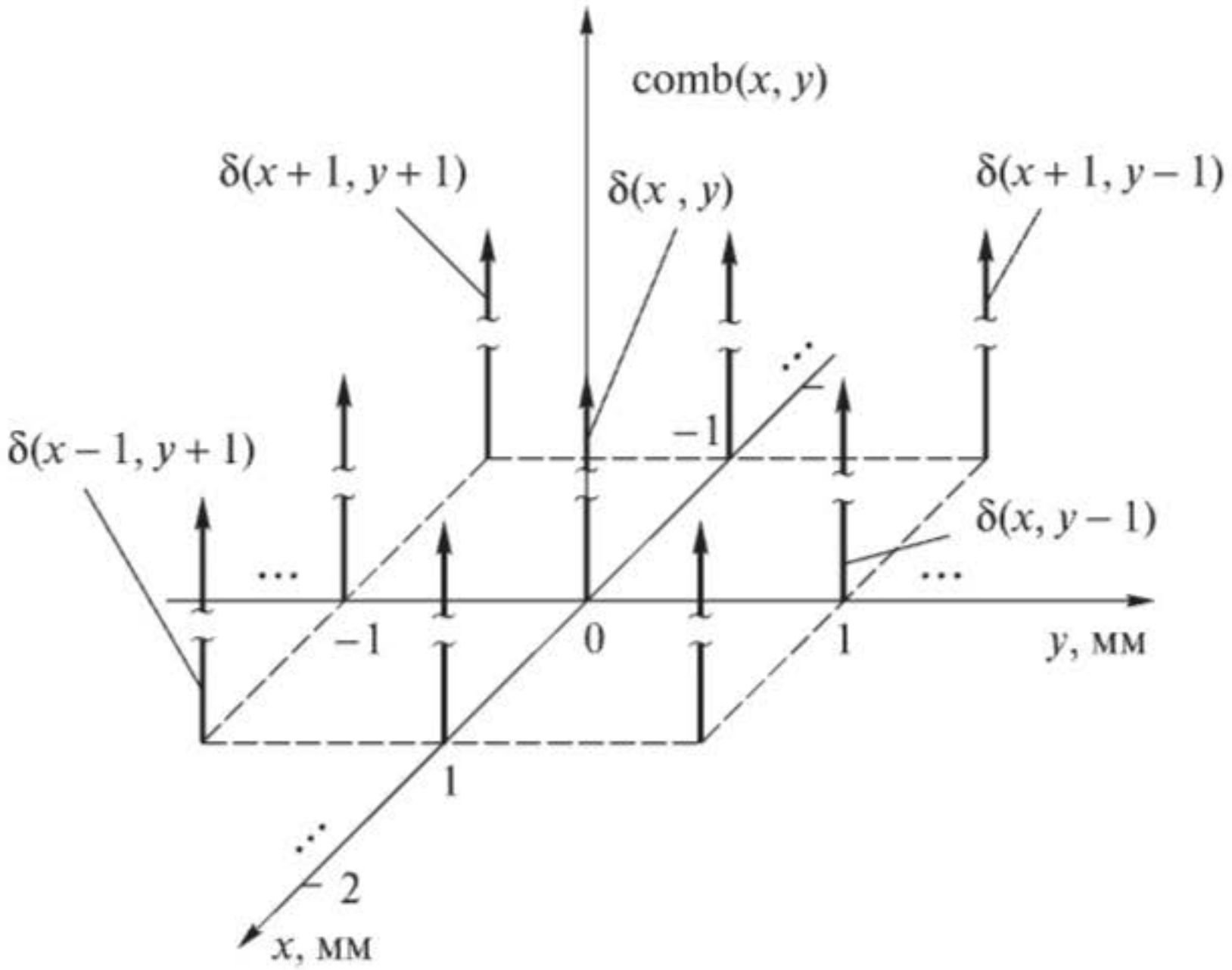


Рис. 1.27. Гребенчатая функция двух переменных

$$\tilde{s}\left(\nu_x, \nu_y\right) = F\left\{\mathrm{comb}(x, y)\right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} \exp\left[i \cdot 2\pi(kx + ly)\right]\exp\left[-i \cdot 2\pi\left(\nu_x x + \nu_y y\right)\right]dxdy =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-i \cdot 2\pi\left((\nu_x - k)x + (\nu_y - l)y\right)\right]dxdy =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta\left(\nu_x - k, \nu_y - l\right) = \mathrm{comb}\left(\nu_x, \nu_y\right). \qquad (1.78)$$

При выводе выражения (1.78) использовано интегральное представление δ-функции двух переменных:

$$\delta\left(\nu_x, \nu_y\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\pm i \cdot 2\pi\left(\nu_x x + \nu_y y\right)\right]dxdy;$$

$$\delta(\ x,\ y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\pm\ i2\pi\left(\nu_x\ x + \nu_y\ y\right)\right]\ d\nu_x\ d\nu_y\ .$$

Выразим функцию, состоящую из суммы δ-функций с любыми периодами T_x и T_y, через функцию comb:

$$s(x, y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta\left(x - kT_x, y - lT_y\right) =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta\left[T_x\left(\frac{x}{T_x} - k\right), T_y\left(\frac{y}{T_y} - l\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{T_x T_y} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta\left[\left(\frac{x}{T_x} - k\right), T_y\left(\frac{y}{T_y} - l\right)\right] = \frac{1}{T_x T_y} \mathrm{comb}\left(\frac{x}{T_x}, \frac{y}{T_y}\right). \quad (1.79)$$

Вычислим фурье-образ функции $s(x, y)$, используя теорему масштабов:

$$\tilde{s}\left(\nu_x, \nu_y\right) = F\left\{s(x, y)\right\} = F\left\{\frac{1}{T_x T_y} \mathrm{comb}\left(\frac{x}{T_x}, \frac{y}{T_y}\right)\right\} =$$

$$= \mathrm{comb}\left(\nu_x x, \nu_y y\right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\nu_x T_x - m, \nu_y T_y - n\right) =$$

$$= \frac{1}{T_x T_y} \mathrm{comb}\left(\nu_x - \frac{m}{T_x}, \nu_y - \frac{n}{T_y}\right). \quad (1.80)$$

1.6. Интегральные операции свертки, ковариации и корреляции

1.6.1. Свертка функций. Преобразование Фурье от свертки, важные приложения свертки

Свертка функций. Сверткой $S_V(x)$ двух функций $s_1(x)$ и $s_2(x)$ называют интегральную операцию, которая определяется выражением

$$S_V(x) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(u) s_2(x - u)\, du = \int_{-\infty}^{\infty} s_1\left(x - u\right) s_2(u)\, du =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} s_1\left(\frac{x}{2} - u\right) s_2\left(\frac{x}{2} + u\right) du = \int_{-\infty}^{\infty} s_1\left(\frac{x}{2} + u\right) s_2\left(\frac{x}{2} - u\right) du =$$

$$= s_1(x) \otimes s_2(x), \quad (1.81)$$

где u — переменная интегрирования; x — аргумент свертки; $\otimes$ — символ свертки.

Функция $s_2(x-u)=s_2\left[-(u-x)\right]$ представляет собой функцию $s_2(-u)$, сдвинутую на x единиц вправо (x — значение сдвига). Тогда геометрическое значение интеграла свертки в точке x равно площади под графиком функции, получаемой в результате перемножения функций $s_1(u)$ и $s_2(x-u)$. При изменении сдвига x находят все остальные значения свертки.

Операция свертки коммутативна, т. е.

$$s_1(x)\otimes s_2(x)=s_2(x)\otimes s_1(x). \tag{1.82}$$

Операция свертки ассоциативна, т. е.

$$\left[s_1(x)\otimes s_2(x)\right]\otimes s_3(x)=s_1(x)\otimes\left[s_2(x)\otimes s_3(x)\right]. \tag{1.83}$$

Если $s_1(x)$ и $s_2(x)$ — финитные функции, т. е. равные нулю соответственно вне интервалов (a_1, b_1) и (a_2, b_2), то функция $S_V(x)=s_1(x)\otimes s_2(x)$ также является финитной функцией, равной нулю вне интервала $(a_1+a_2,\ b_1+b_2)$.

Преобразование Фурье от свертки. Вычислим преобразование Фурье от свертки двух функций:

$$\tilde{S}_V(\nu_x)=F\left\{s_1(x)\otimes s_2(x)\right\}=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}s_1(u)s_2(x-u)du\right]\exp(-i\cdot 2\pi x\nu_x)dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}s_1(u)du\int_{-\infty}^{\infty}s_2(x-u)\exp(-i\cdot 2\pi x\nu_x)dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}s_1(u)du\int_{-\infty}^{\infty}s_2(p)\exp\left[-i\cdot 2\pi\nu_x(p+u)\right]dp=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}s_1(u)\exp(-i\cdot 2\pi u\nu_x)du\int_{-\infty}^{\infty}s_2(p)\exp(-i\cdot 2\pi p\nu_x)dp=$$

$$=\tilde{s}_1(\nu_x)\,\tilde{s}_2(\nu_x). \tag{1.84}$$

При выводе формулы (1.84) во втором интеграле проведена замена переменной: $x-u=\ ,\ p\ xd=dp.$ Таким образом, преобразование Фурье от свертки двух функций равно произведению преобразований Фурье этих функций.

Замечание. Фильтрующее свойство δ-функции можно рассматривать как операцию свертки функции $s(x)$ с δ-функцией, а именно

$$s(x) = s(x) \otimes \delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} s(u)\delta(x-u)du = \int_{-\infty}^{\infty} s(u)\delta(u-x)du. \quad (1.85)$$

Поэтому

$$\tilde{s}(\nu_x) = F\{s(x) \otimes \delta(x)\} = \tilde{s}(\nu_x)F\{\delta(x)\} = \tilde{s}(\nu_x)1(\nu_x) = \tilde{s}(\nu_x). \quad (1.86)$$

Для функций нескольких переменных операцию свертки можно записать в следующем виде:

$$S_V(x, y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(u, p, \tau)s_2(x-u, y-p, t-\tau)dudpd\tau =$$

$$= s_1(x, y, t) \otimes s_2(x, y, t). \quad (1.87)$$

Прямое преобразование Фурье от свертки многомерных функций равно произведению фурье-образов этих функций:

$$\tilde{S}_V(\nu_x, \nu_y, \nu_t) = F\{s_1(x, y, t) \otimes s_2(x, y, t)\} =$$

$$= \tilde{s}_1(\nu_x, \nu_y, \nu_t) \cdot \tilde{s}_2(\nu_x, \nu_y, \nu_t). \quad (1.88)$$

Представление периодической функции с использованием гребенчатой функции и операции свертки. В качестве примера на рис. 1.28 приведена периодическая прямоугольная функция — меандр, описываемая формулой

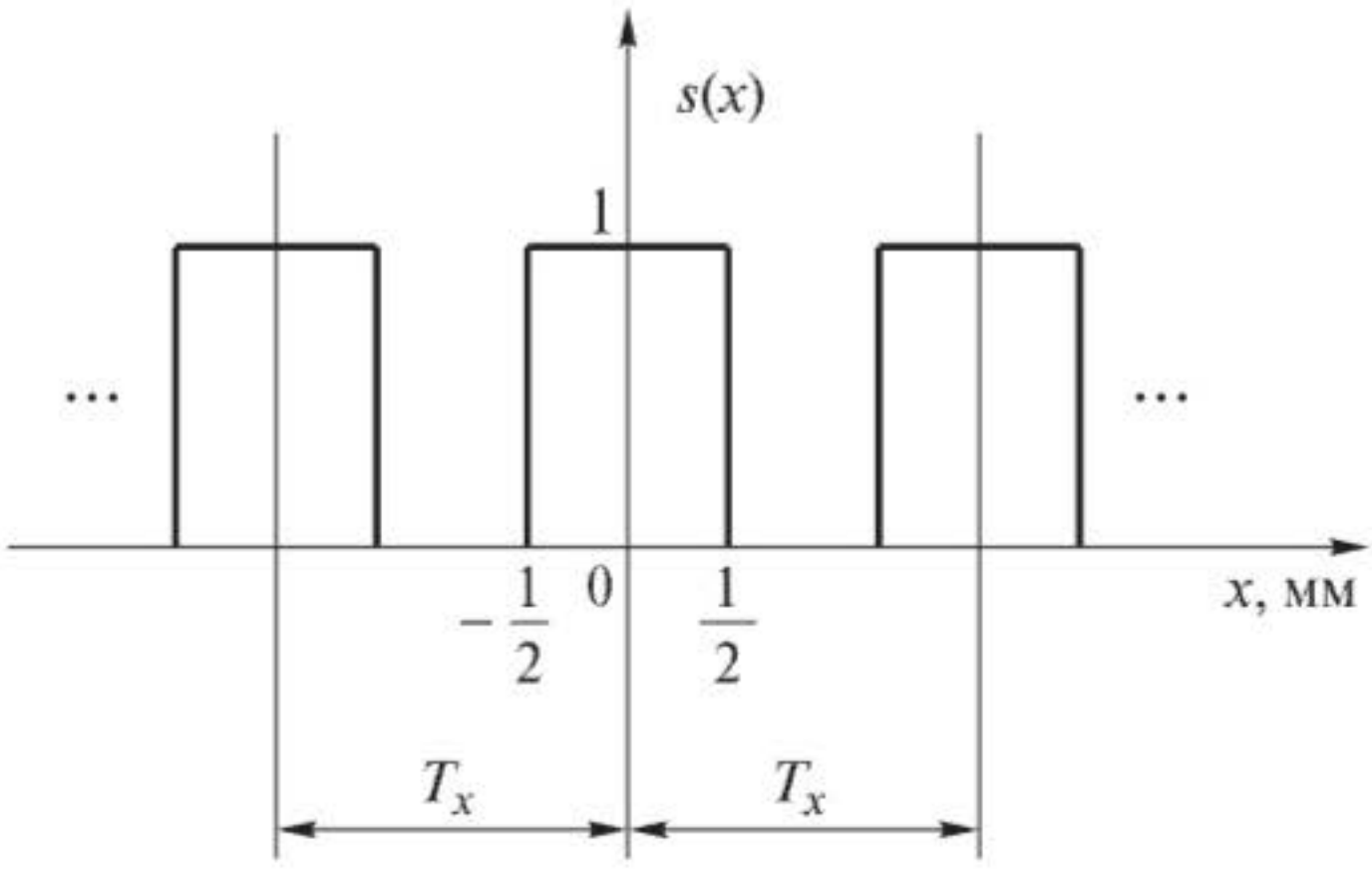


Рис. 1.28. Периодическая прямоугольная функция

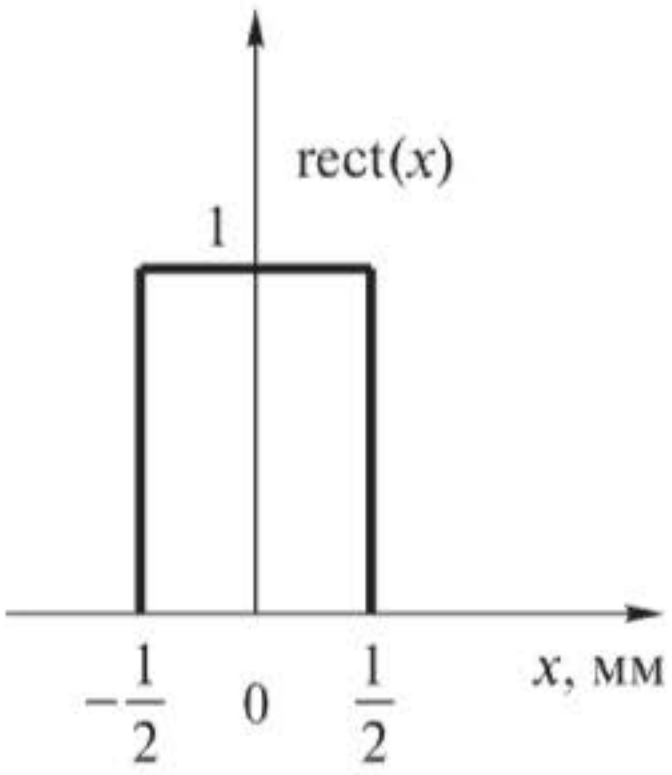


Рис. 1.29. График прямоугольной функции

$$s(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}\left(x - \kappa T_x\right). \qquad (1.89)$$

Покажем, что заданную функцию можно представить, используя операцию свертки прямоугольной и гребенчатой функций, графики которых приведены на рис. 1.29 и 1.30:

$$s(x) = \mathrm{rect}(x) \otimes \frac{1}{T_x}\mathrm{comb}\left(\frac{x}{T_x}\right). \qquad (1.90)$$

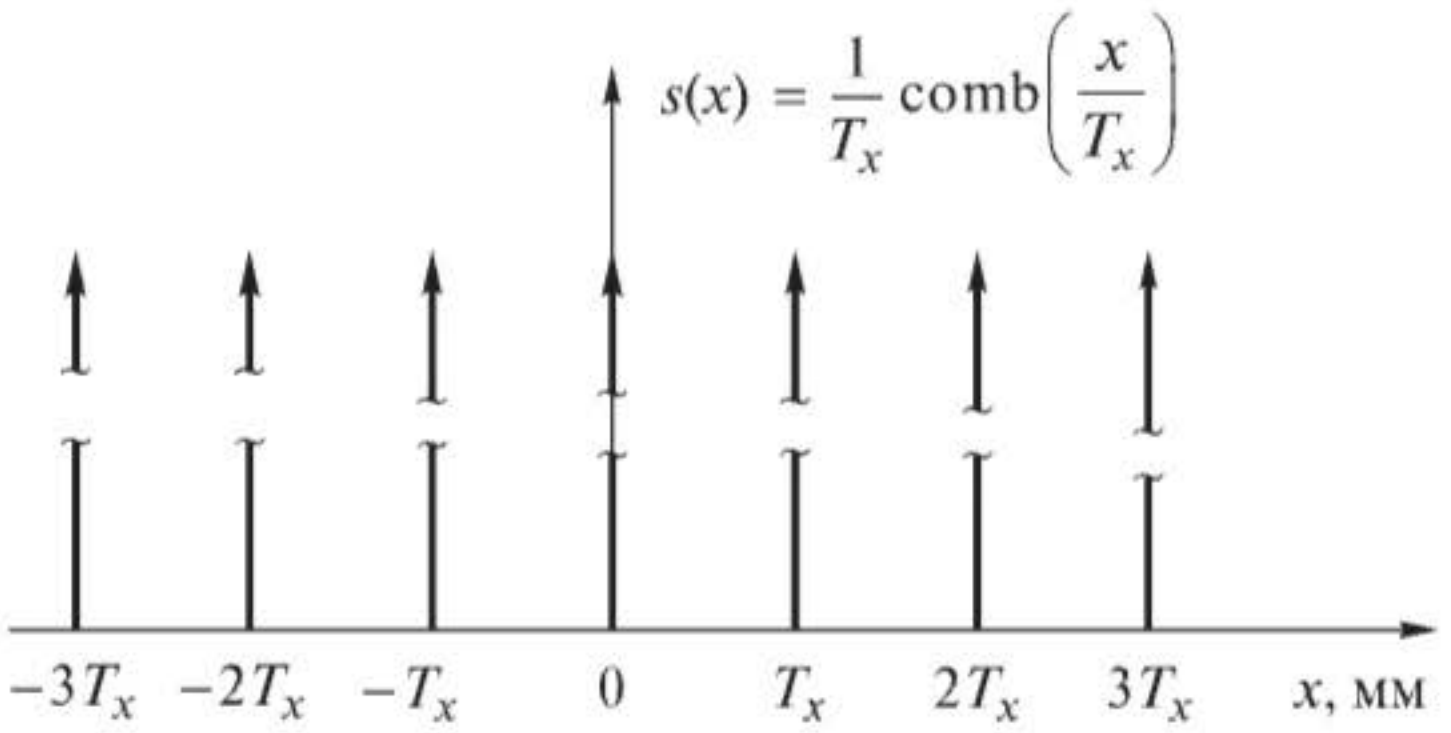


Рис. 1.30. Гребенчатая функция $s(x) = \sum \delta\left(x - \kappa T_x\right)$

Имеем

$$s(x) = \mathrm{rect}(x) \otimes \frac{1}{T_x}\mathrm{comb}\left(\frac{x}{T_x}\right) =$$

$$= \frac{1}{T_x}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}(x-u) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{u}{T_x} - k\right) du =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}(x-u)\delta\left(u - kT_x\right) du = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}\left(x - kT_x\right). \qquad (1.91)$$

Стандартная треугольная функция одной переменной. Треугольная функция определяется выражением

$$\Lambda(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{при} \quad 0 < x \le 1; \\ 1 + x & \text{при} \quad -1 < x \le 0; \\ 0 & \text{при} \quad 1 < x < -1 \end{cases} \qquad (1.92)$$

или

$$\Lambda(x)=\begin{cases}1-|x| & \text{при } |x|\le 1;\\ 0 & \text{при } |x|>1.\end{cases} \tag{1.93}$$

График стандартной треугольной функции $\Lambda(x)$ приведен на рис. 1.31.

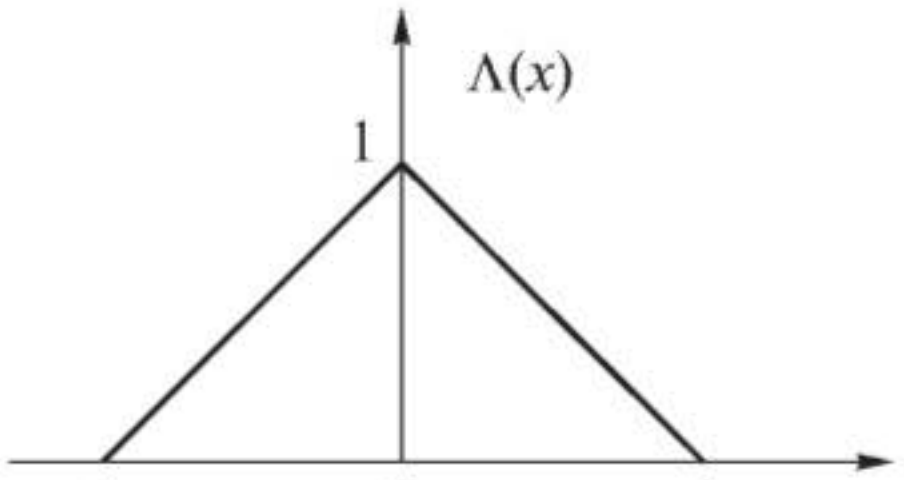


Рис. 1.31. Стандартная треугольная функция

Стандартную треугольную функцию можно представить сверткой двух одинаковых прямоугольных функций (рис. 1.32):

$$S_V(x)=\mathrm{rect}(x)\otimes\mathrm{rect}(x)=$$
$$=\int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}}\mathrm{rect}(u)\,\mathrm{rect}(x-u)\,du.$$

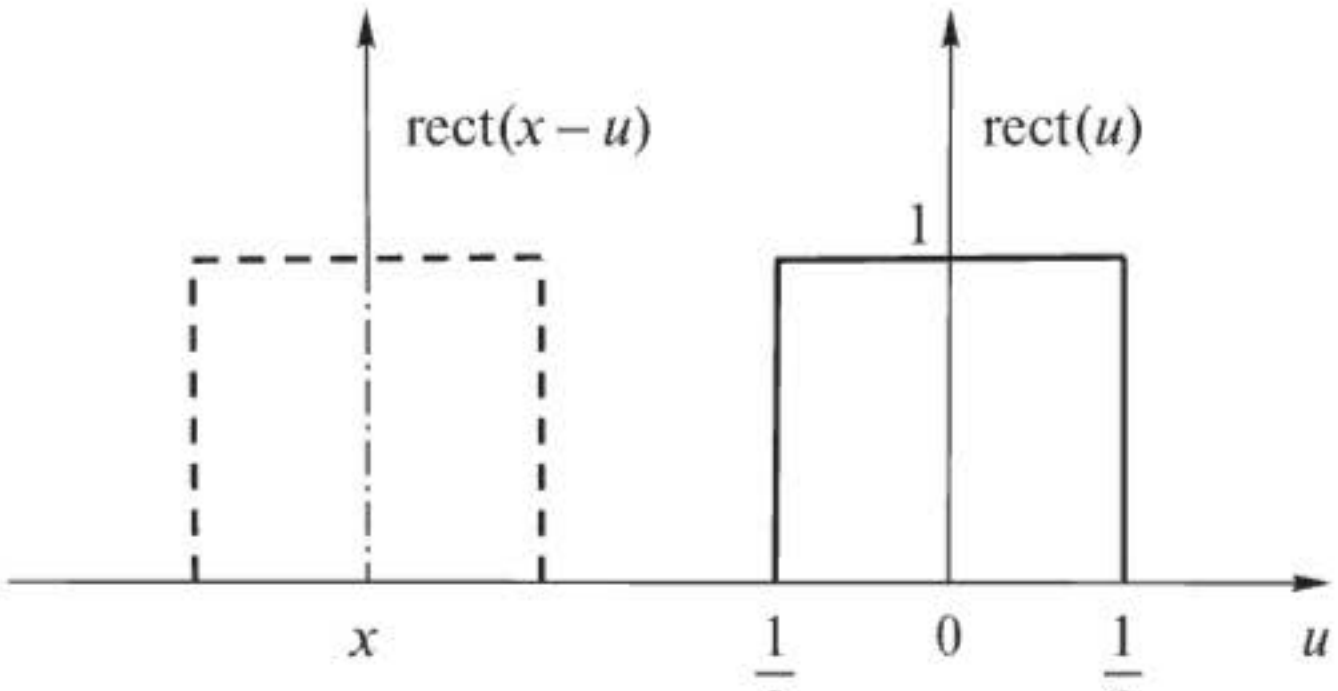


Рис. 1.32. К вычислению свертки прямоугольных функций

При $-1<x\le 0$ $\quad S_V(x)=\int_{x-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}}1\cdot 0\,du+\int_{-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}}du=x+1.$

При $0<x\le 1$ $\quad S_V(x)=\int_{x-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}du+\int_{\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}}1\cdot 0\,du=-x+1.$

Фурье-образ треугольной функции одной переменной можно представить в виде

$$F\{\Lambda(x)\} = F\{\mathrm{rect}(x) \otimes \mathrm{rect}(x)\} =$$
$$= F\{\mathrm{rect}(x)\}\, F\{\mathrm{rect}(x)\} = \mathrm{sinc}^2(\pi\nu_x). \qquad (1.94)$$

График функции $F\{\Lambda(x)\}$ приведен на рис. 1.33.

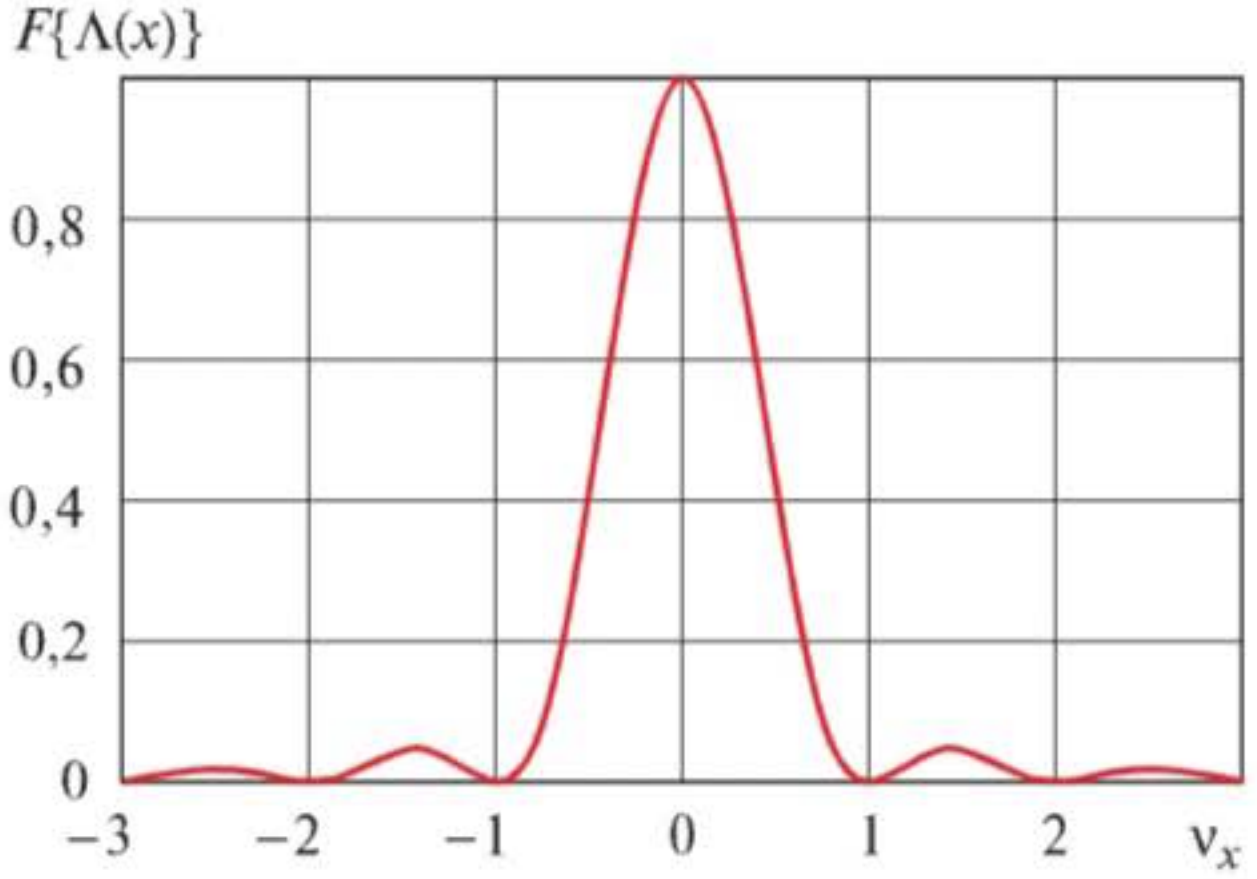


Рис. 1.33. Фурье-образ треугольной функции

1.6.2. Взаимная ковариация. Преобразование Фурье от функции взаимной ковариации

По определению функция **взаимной ковариации** представляет собой следующую интегральную операцию:

$$K_{V12}(x) = s_1(x) * s_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(u) s_2^*(u - x)\, du, \qquad (1.95)$$

где $s_2^*(u - x)$ — комплексно-сопряженная функция с $s_2(u)$, сдвинутая на x единиц; знак «$*$» — символическое обозначение операции взаимной ковариации.

Выясним связь между функциями взаимной ковариации $K_{V21}(x)$ и $K_{V12}(x)$:

$$K_{V21}(x) = s_2(x) * s_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} s_2(u) s_1^*(u - \quad)x \; du$$

Сделав замену переменной $u - x = v$, получим

$$K_{V21}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} s_2(v + x) s_1^*(v) dv = \left[\int_{-\infty}^{\infty} s_1(v) s_2^*(v + x) dv \right]^* = K_{V12}^*(-x).$$

Следовательно, операция взаимной ковариации является некоммутативной.

Если $s_1(x) = s_2(x) = s(x)$, то функция

$$K_V(x) = \int_{-\infty}^{\infty} s(u) s^*(u - x) du = s(x) * s(x) \qquad (1.96)$$

называется функцией ***ковариации*** (***автоковариации***). Операция ковариации коммутативна.

Операцию взаимной ковариации можно выразить через операцию свертки:

$$K_{V12}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(u) s_2^*(u - x) du = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(u) s_2^*[-(x - u)] du = s_1(x) \otimes s_2^*(-x).$$

Это позволяет перенести свойства свертки двух функций на функцию взаимной ковариации. В частности, преобразование Фурье от функции взаимной ковариации имеет вид

$$F\{K_{V12}(x)\} = F\{s_1(x) \otimes s_2^*(-x)\} = \tilde{s}_1(\nu_x) \tilde{s}_2^*(\nu_x). \qquad (1.97)$$

Для функции ковариации (автоковариации) фурье-образ запишем в виде

$$F\{K_V(x)\} = F\{s(x) \otimes s^*(-x)\} = \tilde{s}(\nu_x) \tilde{s}^*(\nu_x) = |\tilde{s}(\nu_x)|^2. \quad (1.98)$$

Для функций нескольких переменных имеем

$$\tilde{K}_{V12}(\nu_x, \nu_y, \nu_t) = F\{K_V(x, y, t)\} = \tilde{s}_1(\nu_x, \nu_y, \nu_t) \tilde{s}_2^*(\nu_x, \nu_y, \nu_t); \quad (1.99)$$

$$K_V(x,y,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} s(u,v,\tau)s^*(u-x,v-y,\tau-t)dudvd\tau; \qquad (1.100)$$

$$\tilde{K}_V\left(\nu_x,\nu_y,\nu_t\right)=F\left\{K_V(x,y,t)\right\}=$$

$$=\tilde{s}\left(\nu_x,\nu_y,\nu_t\right)\tilde{s}^*\left(\nu_x,\nu_y,\nu_t\right)=\left|\tilde{s}\left(\nu_x,\nu_y,\nu_t\right)\right|^2. \qquad (1.101)$$

1.6.3. Корреляция. Преобразование Фурье от функции корреляции (взаимной корреляции)

По определению функция взаимной корреляции (корреляции) представляет собой интегральную операцию вида

$$Kr_{12}(x)=\dot{s}_1(x)*\dot{s}_2(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\dot{s}_1(u)\dot{s}_2^*(u-x)du, \qquad (1.102)$$

где $\dot{s}_1(x)=s_1(x)-\overline{s}_1$ и $\dot{s}_2(x)=s_2(x)-\overline{s}_2$ — центрированные функции.

Для финитных детерминированных функций средние значения $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$ определяются теоремой о среднем значении функции:

$$\overline{s}_1=\frac{1}{b-a}\int_a^b s_1(x)dx; \quad \overline{s}_2=\frac{1}{d-c}\int_c^d s_2(x)dx,$$

где $a\le x\le b$ — область ненулевых значений функции $s_1(x)$; $c\le x\le d$ — область ненулевых значений функции $s_2(x)$.

Для функций типа $\mathrm{rect}(x)$ среднее значение $\overline{s}=\dfrac{\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{rect}(x)dx}{1}=1.$

Следовательно, $\dot{s}(x)=\mathrm{rect}(x)-1=0$. Таким образом, для любых прямоугольных финитных функций $\dot{s}(x)=0$. Поэтому практически для детерминированных функций понятие центрированных функций не используется.

Будем считать, что для детерминированных сигналов понятия ковариации и корреляции идентичны. Если

$$\dot{s}_1(x)=\dot{s}_2(x)=\dot{s}(x),$$

то

$$Kr(x) = \dot{s}(x) * \dot{s}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{s}(u)\dot{s}^*(u-x)du \qquad (1.103)$$

называется функцией ***автокорреляции***. Операцию взаимной корреляции можно свести к свертке:

$$Kr_{12}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{s}_1(u)\dot{s}_2^*(u-x)du = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{s}_1(u)\dot{s}_2^*\left[-(x-u)\right]du =$$

$$= \dot{s}_1(x) \otimes \dot{s}_2^*(-x). \qquad (1.104)$$

Преобразование Фурье от функции взаимной корреляции имеет вид

$$\tilde{Kr}_{12}(\nu_x) = F\left\{Kr_{12}(x)\right\} = F\left\{\dot{s}_1(x) \otimes \dot{s}_2^*(-x)\right\} = \tilde{\dot{s}}_1(\nu_x)\tilde{\dot{s}}_2^*(\nu_x). \qquad (1.105)$$

Фурье-образ функции автокорреляции:

$$\tilde{Kr}(\nu_x) = F\left\{\dot{s}(x) \otimes \dot{s}^*(-x)\right\} = \tilde{\dot{s}}(\nu_x)\tilde{\dot{s}}^*(\nu_x) = \left|\tilde{\dot{s}}(\nu_x)\right|^2. \qquad (1.106)$$

Для функций нескольких переменных имеем

$$Kr_{12}(x, y) = \dot{s}_1(x, y) \otimes \dot{s}_2^*(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \dot{s}_1(u, v)\dot{s}_2^*(u-x, v-y)dudv; \qquad (1.107)$$

$$Kr(x, y) = \dot{s}(x, y) * \dot{s}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \dot{s}(u, v)\dot{s}^*(u-x, v-y)dudv; \qquad (1.108)$$

$$\tilde{Kr}_{12}(\nu_x, \nu_y) = F\left\{Kr_{12}(x, y)\right\} = F\left\{\dot{s}_1(x, y) \otimes \dot{s}_2^*(-x, -y)\right\} =$$

$$= \tilde{\dot{s}}_1(\nu_x, \nu_y)\tilde{\dot{s}}_2^*(\nu_x, \nu_y); \qquad (1.109)$$

$$\tilde{Kr}(\nu_x, \nu_y) = F\left\{\dot{s}(x, y) \otimes \dot{s}^*(-x, -y)\right\} =$$

$$= \tilde{\dot{s}}(\nu_x, \nu_y)\tilde{\dot{s}}^*(\nu_x, \nu_y) = \left|\tilde{\dot{s}}(\nu_x, \nu_y)\right|^2. \qquad (1.110)$$

1.6.4. Преобразование Фурье от произведения двух функций

Пусть

$$s(x) = s_1(x)s_2(x), \tag{1.111}$$

тогда

$$s(\nu_x) = F\{s_1(x)s_2(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(x)s_2(x)\exp(-i\cdot 2\pi\nu_x x)dx. \tag{1.112}$$

Выразив функцию $s_1(x)$ через обратное преобразование Фурье, получим

$$s(\nu_x) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{s}_1(\nu'_x)\exp(i\cdot 2\pi\nu'_x x)d\nu'_x\right]s_2(x)\exp(-i\cdot 2\pi\nu_x x)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\tilde{s}_1(\nu'_x)d\nu'_x\int_{-\infty}^{\infty}s_2(x)\exp\left[-i\cdot 2\pi x(\nu_x-\nu'_x)\right]dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\tilde{s}_1(\nu'_x)\tilde{s}_2(\nu_x-\nu'_x)d\nu'_x = \tilde{s}_1(\nu_x)\otimes\tilde{s}_2(\nu_x). \tag{1.113}$$

Аналогично для функций нескольких переменных имеем

$$F\{s_1(x,y,t)s_2(x,y,t)\} = \tilde{s}_1(\nu_x,\nu_y,\nu_t)\otimes\tilde{s}_2(\nu_x,\nu_y,\nu_t) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\tilde{s}_1(\nu'_x,\nu'_y,\nu'_t)\tilde{s}_2(\nu_x-\nu'_x,\nu_y-\nu'_y,\nu_t-\nu'_t)d\nu'_x d\nu'_y d\nu'_t. \tag{1.114}$$

1.6.5. Теорема Парсеваля

Найдем преобразование Фурье от квадрата модуля функции $s(x)$:

$$F\left\{|s(x)|^2\right\} = F\left\{s(x)s^*(x)\right\} = \tilde{s}(\nu_x)\otimes\tilde{s}^*(-\nu_x) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\tilde{s}(\nu'_x)\tilde{s}^*\left[-(\nu_x-\nu'_x)\right]d\nu'_x. \tag{1.115}$$

Рассмотрим теперь выражение $\int_{-\infty}^{\infty}s(x)s^*(x)dx.$

Оно отличается от выражения

$$F\left\{s(x)s^*(x)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} s(x)s^*(x)\exp\left(-i\cdot 2\pi\nu_x x\right)dx \qquad (1.116)$$

тем, что отсутствует множитель $\exp\left(-i\cdot 2\pi\nu_x x\right)$.

Но если $\nu_x = 0$, то

$$F\left\{s(x)s^*(x)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} s(x)s^*(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{s}\left(\nu'_x\right)\tilde{s}^*\left[-\left(0-\nu'_x\right)\right]d\nu'_x =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{s}\left(\nu'_x\right)\tilde{s}^*\left(\nu'_x\right)d\nu'_x.$$

Таким образом, с точностью до обозначений можно записать

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\tilde{s}\left(\nu_x\right)\right|^2 d\nu_x. \qquad (1.117)$$

Полученное соотношение называется теоремой Парсеваля. Теорема Парсеваля является математической формой закона сохранения энергии. Для функции нескольких переменных теорему Парсеваля записывают в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |s(x,y,t)|^2 dxdydt = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left|\tilde{s}\left(\nu_x,\nu_y,\nu_t\right)\right|^2 d\nu_x d\nu_y d\nu_t. \qquad (1.118)$$

1.7. Дискретно-выборочное представление детерминированных сигналов с ограниченным спектром

Для обработки оптических и электрических сигналов их представляют в виде массивов данных. Необходимой операцией при таком преобразовании сигналов является дискретизация, при которой непрерывный сигнал представляется набором дискретных значений. В общем случае такое преобразование приводит к искажению информации, содержащейся в сигналах. Но для сигналов, имеющих **ограниченный спектр**, существует по крайней мере теоретическая возможность осуществить дискретизацию без потери информации. Это означает, что по набору дискретных значений можно восстановить исходный непрерывный сигнал без искажений.

Реальные объекты, как правило, имеют ограниченные размеры, т. е. являются финитными. Поэтому оптические сигналы от финитных объектов также будут финитными. Электрические сигналы также имеют ограничение во времени. Спектры финитных сигналов не имеют ограничения в частотной области. В то же время, так как модуль спектра финитных сигналов асимптотически стремится к нулю при увеличении частоты, можно принять допущение о том, что существует ограничение в частотной области. Условия, при которых для сигналов с ограниченным спектром существует возможность представления их в дискретном виде без потери информации, определяет теорема Котельникова. Эту теорему также называют теоремой о дискретном представлении, теоремой отсчетов или теоремой выборки.

Теорема Котельникова. Для двумерных сигналов теорема Котельникова формулируется следующим образом: сигнал $S(x, y)$ с ограниченным (финитным) спектром $\tilde{S}(\nu_x, \nu_y)$, заданным в пределах $|\nu_x| \le \nu_{xM}$ и $|\nu_y| \le \nu_{yM}$, можно восстановить с любой степенью точности по дискретной совокупности значений (отсчетов), взятых через конечные интервалы $\Delta x = T_x \le 1/2\nu_{xM}$ и $\Delta y = T_y \le 1/2\nu_{yM}$.

Проведем доказательство теоремы для одномерного случая, т. е. для сигнала $S(x)$, спектр которого ограничен:

$$\tilde{S}(\nu_x) = \begin{cases} \tilde{S}(\nu_x) & \text{при } |\nu_x| \le \nu_{xM}, \\ 0 & \text{при } |\nu_x| > \nu_{xM}. \end{cases} \qquad (1.119)$$

На рис. 1.34 представлены графики сигнала и модуля его финитного спектра, иллюстрирующие это условие.

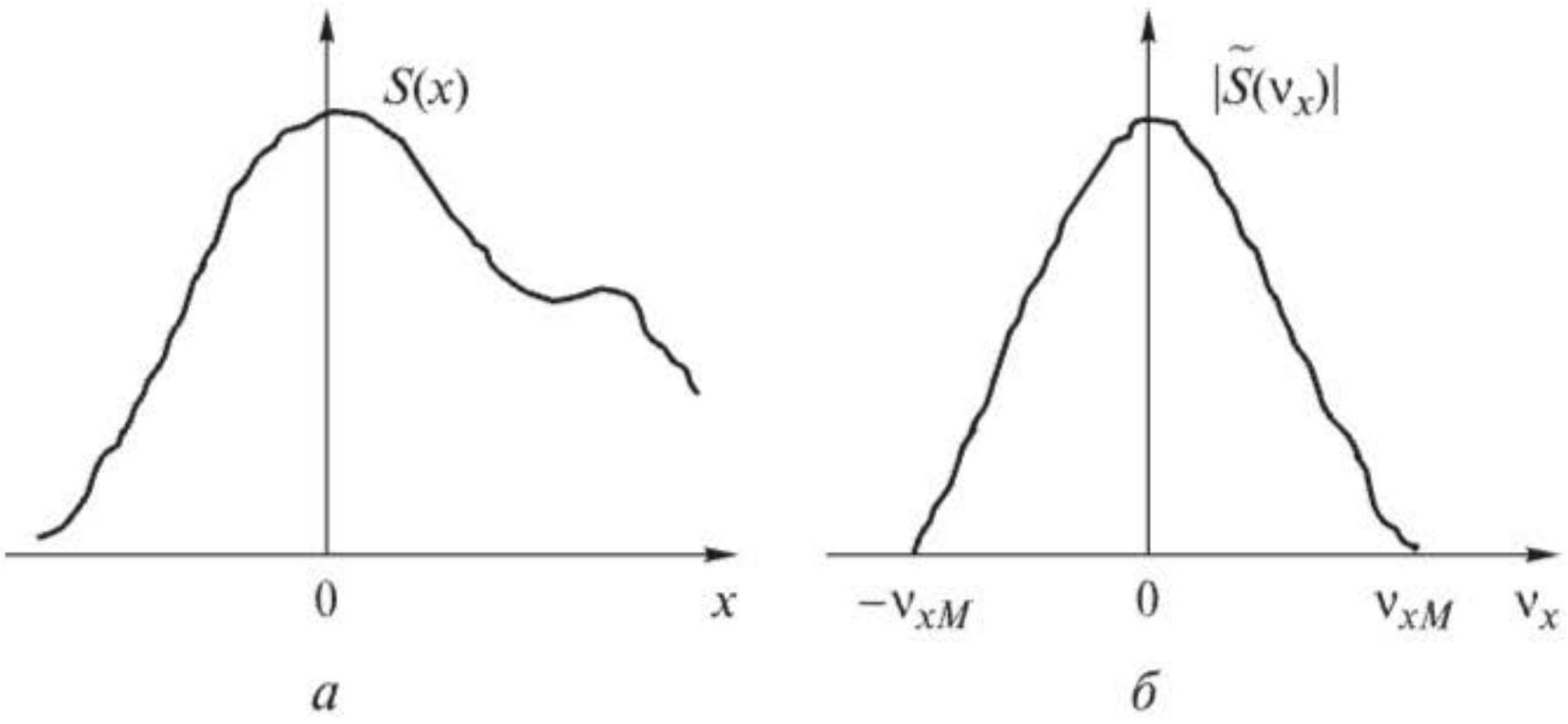


Рис. 1.34. Графики сигнала (*а*) и модуля его финитного спектра (*б*)

Для того чтобы представить функцию $S(x)$ набором отсчетов, необходимо умножить ее на выборочную функцию:

$$s_B(x) = \mathrm{comb}\left(\frac{x}{T_x}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{x}{T_x} - k\right) = T_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - kT_x). \qquad (1.120)$$

Тогда получим

$$S_T(x) = S(x)\mathrm{comb}\left(\frac{x}{T_x}\right) = T_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(kT_x)\delta(x - kT_x). \qquad (1.121)$$

Вычислив преобразование Фурье от (1.121), получим

$$\tilde{S}_T(\nu_x) = F\left\{S(x)\mathrm{comb}\left(\frac{x}{T_x}\right)\right\} = \tilde{S}(\nu_x) \otimes T_x \mathrm{comb}(\nu_x T_x) =$$

$$= \tilde{S}(\nu_x) \otimes \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(\nu_x - \frac{m}{T_x}\right) =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{S}(\nu_x - \nu'_x)\delta\left(\nu'_x - \frac{m}{T_x}\right) d\nu'_x =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{S}\left(\nu_x - \frac{m}{T_x}\right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{S}(\nu_x - m\nu_{x0}). \qquad (1.122)$$

Следовательно, спектр функции $\tilde{S}_T(\nu_x)$ представляет собой периодическую функцию с периодом $\nu_{x0} = 1/T_x$. График функции $\tilde{S}_T(\nu_x)$ при различных значениях ν_{x0} приведен на рис. 1.35.

Из графика на рис. 1.35, *а* следует, что при условии $\nu_{x0} = 1/T_x < 2\nu_{xM}$ спектры перекрываются. Поскольку между спектром и сигналом существует однозначная связь, при таком условии восстановить исходный сигнал невозможно.

Но если выполняется условие $\nu_{x0} = 1/T_x \geq 2\nu_{xM}$, то, как следует из рис. 1.35, *б*, если сигнал пропустить через идеальный низкочастотный фильтр с передаточной функцией, имеющей вид $\mathrm{rect}\left(\frac{\nu_x}{2\nu_{xM}}\right)$, побочные составляющие спектра можно подавить и восстановить спектр исходного сигнала. Следовательно, после выполнения операции низкочастотной фильтрации будет восстановлен и исходный сигнал. Условие, при котором может

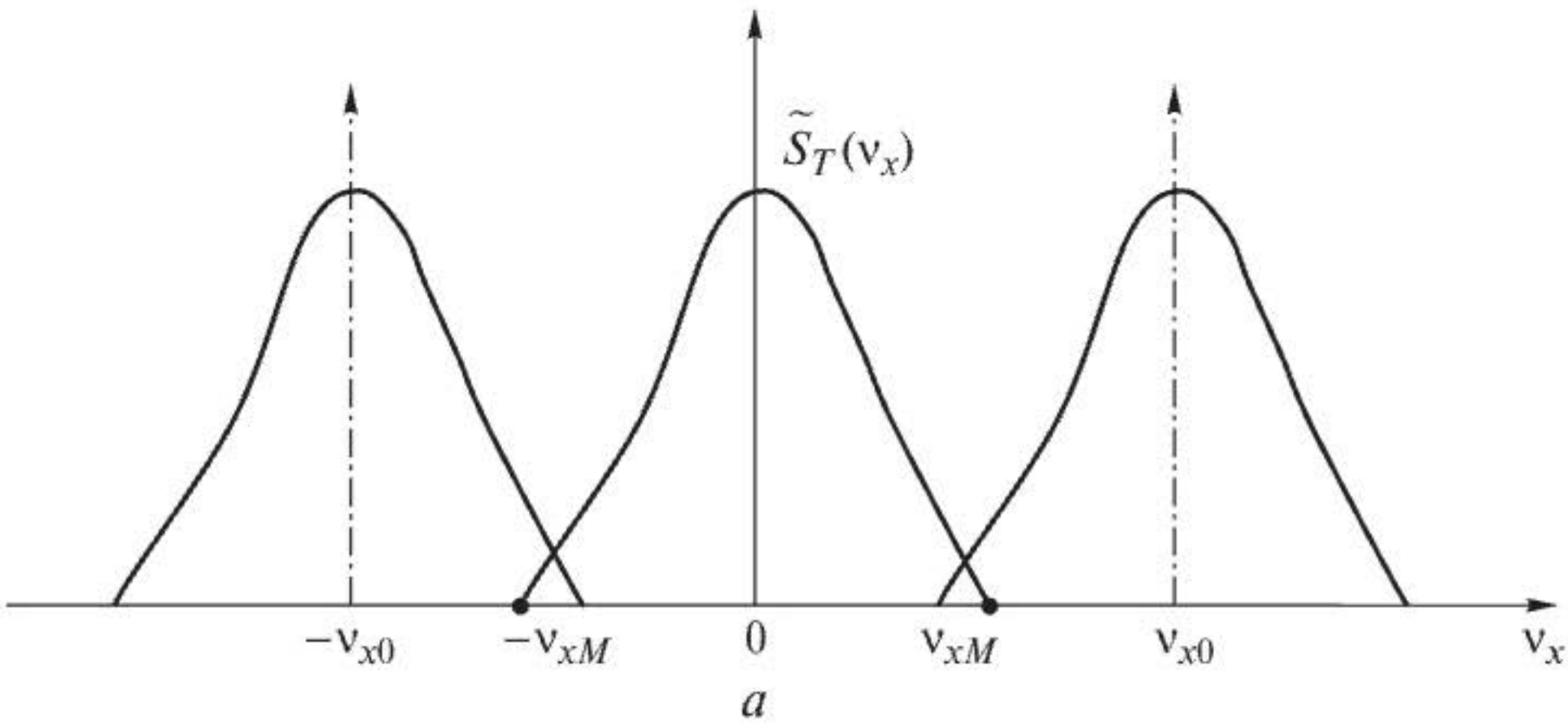


Рис. 1.35. График функции $\tilde{S}_T(\nu_x)$ при $\nu_{x0} < 2\nu_{xM}$ (*а*) и $\nu_{x0} > 2\nu_{xM}$ (*б*)

быть получен такой результат, записывают в виде неравенства $T_x \le 1/2\nu_{xM}$. Сформулируем приведенные рассуждения в виде математических соотношений.

Спектр сигнала после фильтрации описывается выражением

$$\tilde{S}'_T(\nu_x) = \text{rect}\left(\frac{\nu_x}{2\nu_{xM}}\right)\sum_{m=-\infty}^{\infty}\tilde{S}\left(\nu_x - \frac{m}{T_x}\right) =$$

$$= \left\{\text{так как } T_x \le \frac{1}{2\nu_{xM}}, \text{ то}\right\} = \tilde{S}(\nu_x). \qquad (1.123)$$

С учетом соотношений (1.121) и (1.122) спектр сигнала после фильтрации идеальным низкочастотным фильтром при выполнении неравенства $T_x \le 1/2\nu_{xM}$ можно представить в виде

$$\tilde{S}(\nu_x) = F\left\{S(x)\,\mathrm{comb}\left(\frac{x}{T_x}\right)\right\}\mathrm{rect}\left(\frac{\nu_x}{2\nu_{xM}}\right) =$$

$$= F\left\{S(x)T_x\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(x-kT_x)\right\}\mathrm{rect}\left(\frac{\nu_x}{2\nu_{xM}}\right). \qquad (1.124)$$

Вычислив обратное преобразование Фурье от (1.124) и приняв, что $T_x = 1/2\nu_{xM}$, получим

$$S(x) = F^{-1}\{S(\nu_x)\} =$$

$$= \left\{S(x)\frac{1}{2\nu_{xM}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(x-\frac{k}{2\nu_{xM}}\right)\right\}\otimes 2\boldsymbol{\nu}_{xM}\,\mathrm{sinc}(2\pi\nu_{xM}x) =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}S(x')\delta\left(x'-\frac{k}{2\nu_{xM}}\right)\mathrm{sinc}\left[2\pi\nu_{xM}(x-x')\right]dx' =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty}S\left(\frac{k}{2\nu_{xM}}\right)\mathrm{sinc}\left[2\pi\nu_{xM}\left(x-\frac{k}{2\nu_{xM}}\right)\right]. \qquad (1.125)$$

Выражение (1.125) известно как ряд Котельникова или интерполяционный полином Котельникова. Это означает, что функцию с ограниченным спектром можно интерполировать функциями вида $\mathrm{sinc}\left[2\pi\nu_{xM}\left(x-\frac{k}{2\nu_{xM}}\right)\right]$, взятыми с весами, равными значениям функции в точках отсчетов.

Обобщая полученный результат для двумерной функции, получаем

$$S(x, y) = \sum_{k,l=-\infty}^{\infty}S\left(\frac{k}{2\nu_{xM}}\ \frac{l}{2\nu_{yM}}\right)\ \mathrm{sinc}\left[2\pi\nu_{xM}\left(x-\frac{k}{2\nu_{xM}}\right)\right]\times$$

$$\times\,\mathrm{sinc}\left[2\pi\nu_{yM}\left(y-\frac{l}{2\nu_{yM}}\right)\right]. \qquad (1.126)$$

Теорема Котельникова для частотной области. Если сигнал, описываемый функцией $S(x)$, отличен от нуля на отрезке $|x| \le x_M$, то спектр такого финитного сигнала полностью определяется со-

вокупностью отсчетов, взятых через одинаковые интервалы, которые удовлетворяют условию $\Delta\nu_x \le 1/2x_M$.

Для одномерной финитной функции ряд Котельникова в частотной области имеет вид

$$\tilde{S}(\nu_x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{S}\left(\frac{m}{2x_M}\right)\operatorname{sinc}\left[2\pi x_M\left(\nu_x - \frac{m}{2x_M}\right)\right]. \qquad (1.127)$$

Для двумерной финитной функции, которая отлична от нуля в прямоугольной области $|x| \le x_M$, $|y| \le x_M$, ряд Котельникова в частотной области имеет вид

$$\tilde{S}(\nu_x, \nu_y) = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \tilde{S}\left(\frac{m}{2x_M}, \frac{n}{2y_M}\right)\operatorname{sinc}\left[2\pi x_M\left(\nu_x - \frac{m}{2x_M}\right)\right] \times$$

$$\times \operatorname{sinc}\left[2\pi y_M\left(\nu_y - \frac{n}{2y_M}\right)\right]. \qquad (1.128)$$

2. ОПИСАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ

Представление о случайном сигнале можно получить из различных областей физики и техники. Примерами случайного сигнала являются наблюдаемая на экране осциллографа реализация шума на выходе приемника излучения, распределение яркости облачного неба или морской поверхности. Случайные сигналы описываются случайными функциями. В основе описания случайных сигналов лежит математический аппарат теории вероятностей и случайных процессов.

2.1. Элементы теории вероятностей

Вспомогательные понятия

1. *Полная группа событий.* Если в результате опыта неизбежно должно появиться хотя бы одно из возможных событий, то говорят, что эти события образуют полную группу событий.

2. *Несовместные события.* Несколько событий называются несовместными, если никакие два из них не могут появиться вместе.

3. *Равновозможные события.* События в данном опыте называются равновозможными, если по условиям симметрии опыта есть

основание считать, что ни одно из них не является объективно более возможным, чем другое.

С опытами, обладающими симметрией возможных исходов, связывают особые группы событий, которые образуют полную группу событий, несовместны и равновозможны. События, образующие такую группу, называются *случаями* или *шансами*.

Случай называется *благоприятным* событию A, если появление этого случая влечет за собой появление данного события.

Исходное понятие. Если опыт сводится к схеме появления случаев, то *вероятность* $P(A)$ события A в данном опыте можно вычислить как *долю благоприятных случаев* m_A в их общем числе n случаев, а именно $P(A) = \frac{m_A}{n}$.

Это определение было принято в XVII веке. В настоящее время формальное определение понятия «вероятность» не дают, используя это понятие как исходное.

Теоретико-множественный подход к понятиям теории вероятностей

Основное определение:

дано дискретное пространство (множество) элементарных событий $\Omega = \{e_1, e_2, ...\}$, причем $e_i \cap e_j = \varnothing$, и с каждым из этих событий связана вероятность $P(e_i)$, значения которой могут быть равными нулю. Тогда

$$P(e_1) + P(e_2) + ... = 1.$$

Пример: в опыте бросания игральной кости пространство элементарных событий $\Omega = \{1, 2, ..., 6\}$.

Аксиомы теории вероятностей.

1. Вероятность любого события A принимает значения

$$0 \le P(A) \le 1;$$

2. Если A и B несовместные события ($AB = \varnothing$), то

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \qquad (2.1)$$

Общий случай: если $A_i A_j = \varnothing$, $i \ne j$, $i, j = \overline{1, n}$, то

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i). \qquad (2.2)$$

Следствия из аксиом теории вероятностей.

1. Сумма вероятностей полной группы несовместных событий равна единице:

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1. \tag{2.3}$$

Если два события A и $\bar{A}$ противоположны, то они образуют полную группу событий, т. е. $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

2. Если события A и B совместны, т. е. $AB \neq \varnothing$, то

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \tag{2.4}$$

Условная вероятность событий. Правило умножения вероятностей. ***Условные вероятности*** характеризуют события, которые наступают при некотором условии, например событие B при наступлении события A. Тогда по определению

$$P(B|A) = P(A \cap B)/P(A) = P(AB)/P(A) \tag{2.5}$$

(полагаем, что $P(A) \neq 0$).

Формулу (2.5) трактуют и как *формулу умножения*, представляя ее в виде

$$P(A \cap B) = P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B).$$

Формула умножения для независимых событий:

если события A и B независимые, то

$$P(A \cap B) = P(AB) = P(A)P(B).$$

Аналогично для n независимых событий:

$$P(A_1, A_2, \ldots, A_n) = P(A_1)P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n).$$

Формула полной вероятности. Эта формула является следствием формул сложения и умножения вероятностей.

Пусть счетное множество $H = \bigcup_{i=1}^{n} H_i$, причем $H_k \bigcap H_l = \varnothing$. Событие A может осуществляться одновременно с элементарными событиями H_i, т. е. $A = A \cdot H_1 + A \cdot H_2 + \ldots + A \cdot H_n$, тогда

$$P(A)=\sum_{j=1}^{n}P\left(H_j\right)P\left(A\middle|H_j\right). \tag{2.6}$$

Формула Байеса (теорема гипотез). Эта формула является следствием формулы умножения вероятностей и формулы полной вероятности.

Об условиях опыта до его проведения можно принять ряд гипотез $H_1, H_2, \ldots, H_n$, несовместных, образующих полную группу событий

$$H=\bigcup_{i=1}^{n}H_i=\sum_{i=1}^{n}H_i,\quad H_k\bigcap H_l=\varnothing.$$

Следовательно, $P(H)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)=1.$

В результате проведения опыта произошло событие A, наступление которого связано с гипотезами H_i.

Какова апостериорная вероятность $P\left(H_i\middle|A\right)$ гипотезы H_i, если произошло событие A?

По теореме умножения,

$$P(A\cap H_i)=P(AH_i)=P(A)P\left(H_i\middle|A\right)=P(H_i)\,P\left(A\middle|H_i\right);$$

$$P\left(H_i\middle|A\right)=\frac{P\left(H_i\right)P\left(A\middle|H_i\right)}{P(A)}.$$

Воспользовавшись формулой полной вероятности, получим формулу Байеса:

$$P\left(H_i\middle|A\right)=\frac{P\left(H_i\right)P\left(A\middle|H_i\right)}{\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P\left(A\middle|H_i\right)}. \tag{2.7}$$

Случайные величины. Законы распределения случайных величин

В классической теории вероятностей оперируют со случайными событиями. Для прикладных целей используется понятие «случайная величина» (СВ).

Случайная величина — это величина, которая в результате опыта со случайным исходом принимает то или иное значение. Возможные значения СВ образуют множество Ψ, которое называется множеством возможных значений (МВЗ) случайных величин.

Примеры СВ:

• опыт — бросание игральной кости: СВ — X — число выпавших очков, МВЗ — $\Psi = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;

• опыт — бросание трех монет: СВ — частота R появления герба, МВЗ — $\Psi = \{0, 1/3, 2/3, 1\}$;

• опыт — наработка на отказ прибора: СВ — время T до первого отказа (сбоя), МВЗ — $\Psi = [0, t]$, т. е. вся правая половина оси времени, причем граница расплывчата, неопределенна. Множество Ψ несчетно.

Таким образом, СВ могут быть двух типов:

1) МВЗ Ψ конечно или счетно (их можно перенумеровать). Это дискретные СВ;

2) МВЗ Ψ несчетно. Это недискретные СВ, которые могут быть непрерывными и дискретно-непрерывными.

В теоретико-множественной трактовке понятий теории вероятностей СВ X является функцией элементарного события, а именно $X = \varphi(\omega)$, где ω — элементарное событие, причем $\omega \in \Omega$, т. е. принадлежит пространству элементарных событий Ω.

Если МВЗ Ψ конечно или счетно, то случайная величина (СВ) X называется дискретной, если МВЗ Ψ несчетно, то СВ называется недискретной.

Законы распределения случайных величин

Законом распределения СВ называется любое правило (таблица, функция), определяющее вероятности всевозможных событий, связанных со случайной величиной.

Для дискретной СВ закон распределения удобно задавать рядом распределения (таблицей) или многоугольником распределения.

Наиболее общей формой представления закона распределения является ***функция распределения*** СВ X, определяющая вероятность P того, что она примет значение, меньшее, чем заданное значение x:

$$F(x) = P\{X < x\}. \qquad (2.8)$$

Ниже приведены свойства функции распределения:

1) $F(x)$ — неубывающая функция аргумента x;

2) $F(-\infty) = 0$;

3) $F(+\infty) = 1$;

$$P\{\alpha \le X < \beta\} = F(\alpha) - F(\beta);$$

$$P\{X = \alpha\} = \lim_{\beta \to \alpha} [F(\beta) - F(\beta)].$$

Случайная величина называется непрерывной, если ее функция распределения непрерывна и дифференцируема всюду, кроме отдельных точек, где происходит излом.

Для непрерывной СВ $P\{X = \alpha\} = 0$.

Можно ввести ***плотность распределения*** (или ***плотность вероятности***, или ***плотность***):

$$p(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}; \qquad (2.9)$$

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} p(x)dx;$$

$$F(x) = P\{X < x\} = P\{-\infty < X < x\} = \int_{-\infty}^{x} p(\xi)d\xi.$$

Свойства плотности распределения:

1) $p(x) \ge 0$;

2) $\int_{-\infty}^{\infty} W(x)dx = 1.$

Размерность плотности обратна размерности СВ.

Для дискретных СВ можно ввести плотность распределения, используя известные свойства сингулярных функций: функции Хэвисайда $Y(x)$ и δ-функции Дирака.

Плотность распределения

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i \delta(x - x_i). \qquad (2.10)$$

Функция распределения

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(\xi)d\xi = \sum_{i=0}^{n} p_i Y(x - x_i). \qquad (2.11)$$

Для непрерывных СВ интегральная формула полной вероятности и интегральная формула Байеса имеют вид

$$P(A) = \int_{-\infty}^{\infty} P\left(A\middle|x\right) W(x)dx; \tag{2.12}$$

$$p\left(x\middle|A\right) = \frac{p(x)P\left(A\middle|x\right)}{\int_{-\infty}^{\infty} P\left(A\middle|x\right) p(x)dx}. \tag{2.13}$$

Моменты случайных величин

1. Начальные моменты СВ.

Начальным моментом s-го порядка СВ X называется математическое ожидание s-й степени этой величины:

$$\alpha_s[X] = M[X^s].$$

Для дискретной СВ

$$\alpha_s[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i^s p_i. \tag{2.14}$$

Для непрерывной СВ

$$\alpha_s[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x^s p(x)dx. \tag{2.15}$$

Математическое ожидание СВ X

$$m_x = \alpha_1[X] = M[X].$$

2. Центральные моменты СВ.

Центрированной СВ называется отклонение СВ от ее математического ожидания:

$$\overset{\circ}{X} = X - m_x;$$

$$M\left[\overset{\circ}{X}\right] = M[X - m_x] = 0.$$

Моменты центрированных СВ называют **центральными моментами**. *Центральным моментом s-го порядка* СВ X называется математическое ожидание s-й степени центрированной СВ:

$$\mu_s[X] = M\left[\overset{\circ}{X}{}^s\right] = M\left[(X - m_x)^s\right].$$

Для дискретной СВ центральный момент

$$\mu_s = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^s p_i. \qquad (2.16)$$

Для непрерывной СВ центральный момент

$$\mu_s = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^s W(x) dx. \qquad (2.17)$$

Второй центральный момент — дисперсия

$$\mu_2[X] = M\left[\overset{\circ}{X}{}^2\right] = M\left[(X - m_x)^s\right] = D[X] = D_x. \qquad (2.18)$$

В некоторых случаях удобно использовать формулу

$$D_x = \alpha_2 - m_x^2 = M[X^2] - (M[X])^2. \qquad (2.19)$$

Среднее квадратическое отклонение

$$\sigma[X] = \sigma_x = \sqrt{D[X]} = \sqrt{D_x}. \qquad (2.20)$$

Коэффициент вариации (используют для неотрицательных СВ X)

$$\nu = \sigma / m_x. \qquad (2.21)$$

Диапазон значений СВ. Как правило, значения СВ не выходят за пределы $m_x \pm 3\sigma$.

Законы распределения случайных величин

Рассмотрим законы ***распределения дискретных случайных величин***.

1. Биномиальное распределение. Случайная величина X имеет *биномиальное распределение*, если ее возможные значения 0, 1,

2, ..., m, ..., n и соответствующие вероятности определяются по формуле

$$P_m = C_n^m p^m q^{n-m}, \text{ причем } 0 < p < 1,\ q = 1 - p,\ m = \overline{0, n}. \qquad (2.22)$$

Числовые характеристики распределения:

- математическое ожидание $m_x = np$;
- дисперсия $D_x = npq$.

2. Распределение Пуассона.

Случайная величина X имеет распределение Пуассона, если ее возможные значения 0, 1, 2, ..., m, ..., ∞ (бесконечное, но счетное множество значений), а соответствующие вероятности определяются по формуле

$$P_m = \frac{a^m}{m!} e^{-a}, \text{ причем } m = \overline{0, \infty}. \qquad (2.23)$$

Числовые характеристики распределения:

- математическое ожидание $m_x = a$;
- дисперсия $D_x = a$.

Многие физические явления описываются распределением Пуассона, в частности, этому закону распределения подчиняется излучение фотонов электромагнитного излучения.

Рассмотрим ***законы распределения непрерывных случайных величин***.

1. Равномерное распределение. Случайная величина X имеет *равномерное распределение* на интервале (a, b), если плотность вероятности $W(x)$ на этом отрезке постоянна:

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{при } x \in (a, b); \\ 0 & \text{при } x \notin (a, b). \end{cases} \qquad (2.24)$$

Числовые характеристики распределения:

- математическое ожидание $m_x = \dfrac{a+b}{2}$;
- дисперсия $D_x = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

Функция распределения

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} p(\xi)d\xi=\begin{vmatrix} 0 & \text{при } x<a; \\ (x-a)/(b-a) & \text{при } a\le x\le b; \\ 1 & \text{при } x>b. \end{vmatrix} \qquad (2.25)$$

2. Нормальное распределение. Случайная величина X распределена по *нормальному закону* с параметрами m и σ, если плотность вероятности $W(x)$ имеет вид

$$W(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\}. \qquad (2.26)$$

Числовые характеристики распределения:

- математическое ожидание $m_x = m$;
- дисперсия $D_x = \sigma$.

Функция распределения

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp\left\{-\frac{(\xi-m)^2}{2\sigma^2}\right\}d\xi. \qquad (2.27)$$

Функция распределения нормального закона может быть выражена через функцию Лапласа

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x}\exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}dt,$$

график которой представлен на рис. 2.1.

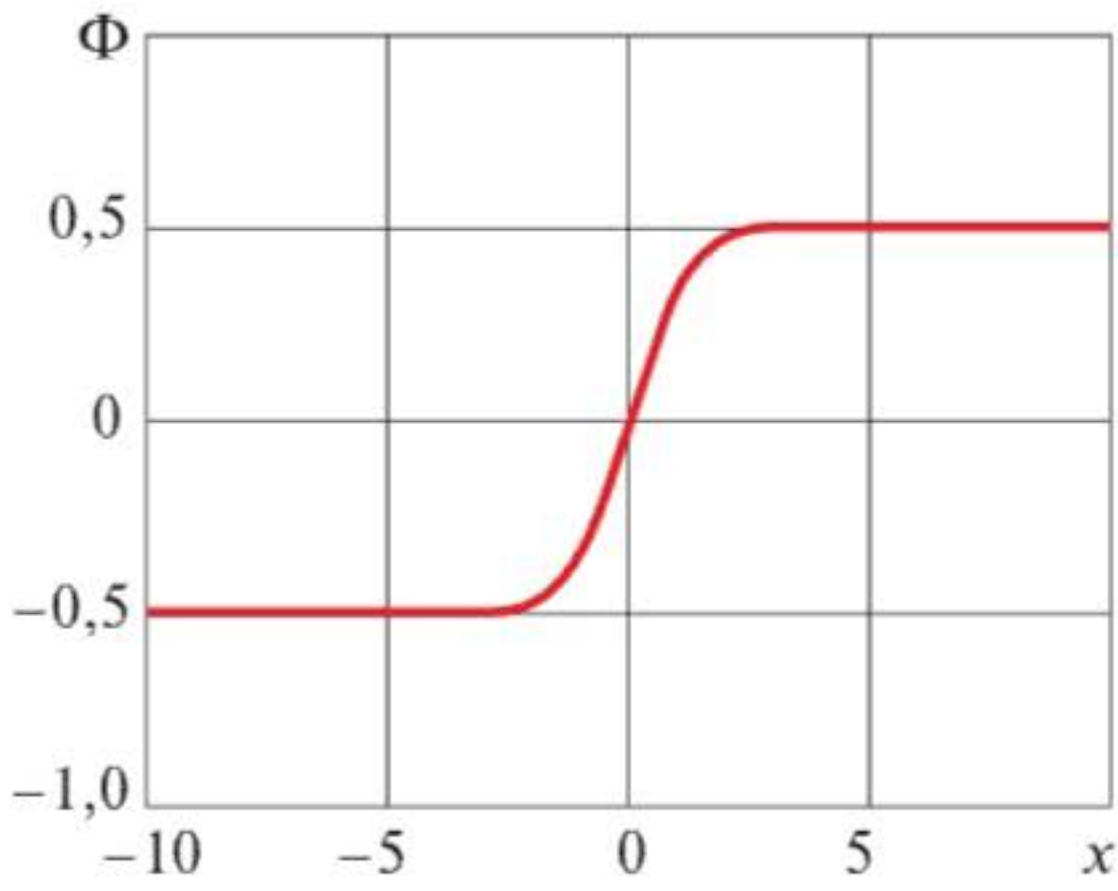


Рис. 2.1. График функции Лапласа

Тогда можно записать функцию распределения (ФР) в виде

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x - m}{\sigma}\right). \qquad (2.28)$$

Системы случайных величин

Система СВ представляет собой совокупность двух и более СВ, например географические координаты приземления космического корабля.

Система СВ $X_1, X_2, ..., X_n$ характеризует случайное положение точки в n-мерном пространстве измерений. Для определения положения этой точки в n-мерном пространстве измерений можно ввести случайный вектор $\vec{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)^T$.

Функцией распределения системы двух случайных величин (X, Y) называется вероятность совместного выполнения двух событий, заключающихся в выполнении неравенств $X < x$ и $Y < y$:

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y).$$

Система двух дискретных случайных величин. Рассмотрим *систему двух* СВ (X, Y):

$$X: \{x_1, ..., x_n\}; \quad Y: \{y_1, ..., y_n\}.$$

Аналогом *ряда* распределения одной дискретной СВ является *матрица распределения* — прямоугольная матрица, в которой приведены значения вероятностей $p_{ij}, i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}$ системы СВ:

y_j / x_i	y_1	y_2	...	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1m}
x_2	p_{21}	p_{22}	...	...
...	...	...	...	...
x_n	p_{n1}	...	...	p_{nm}

Следует иметь в виду, что для системы СВ выполняется условие $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1$.

Система двух непрерывных случайных величин. Система двух СВ называется непрерывной, если ее функция распределения $F(x, y\ )$ есть непрерывная функция, дифференцируемая по каждому из аргументов, у которой существует вторая смешанная производная $\dfrac{\partial^2 F(x, y\ )}{\partial x \partial y}$.

В этом случае плотность распределения системы двух непрерывных СВ — совместная плотность — определяется выражением

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x+\Delta x, y) - F(x, y+\Delta y) + F(x, y)}{\Delta x \Delta y} =$$

$$= \frac{\partial^2 F(x, y\ )}{\partial x \partial y} = p(x, y\ ). \qquad (2.29)$$

Свойства системы случайных величин:

1) $p(x, y) \geq 0$;

2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x, y)dxdy = 1$;

3) $F(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} p(\xi, \eta)d\xi d\eta$;

4) маргинальные плотности распределения

$$p(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x, y)dy \quad p(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x, y)dx \qquad (2.30)$$

5) маргинальные функции распределения

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(\xi, y)d\xi dy; \quad F(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{y} p(x, \eta)dxd\eta. \qquad (2.31)$$

Зависимые и независимые случайные величины

Независимые случайные величины. Две СВ называются независимыми, если независимы все связанные с ними события, например $\{X < x\}$ и $\{Y < y\}$, $\{X = x\}$ и $\{Y = y\}$ и т. д.

Если СВ X и Y, образующие систему, независимы, то функции распределения выражаются произведением соответствующих функций распределения:

$$F(x, y) = P\{X < x, Y < y\} = P\{X < x\}P\{Y < y\} = \\ = F_1(x)F_2(y). \quad (2.32)$$

Это правило справедливо для любых СВ: дискретных, непрерывных и смешанных.

Рассмотрим следствия из этого правила для дискретных и непрерывных СВ.

Для дискретных СВ:

если дискретные СВ X и Y имеют матрицу распределения $\|p_{ij}\|$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, то

$$p_{ij} = P\{X = x_i; Y = y_j\} = P\{X = x_i\}P\{Y = y_j\} = p_{x_i}p_{y_j}, \quad (2.33)$$

где $p_{x_i} = P\{X = x_i\}$, $p_{y_j} = P\{Y = y_j\}$.

Для непрерывных СВ:

непрерывные СВ независимы, если совместная плотность распределения равна произведению плотностей распределения:

$$p(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial F_1(x)}{\partial x}\frac{\partial F_2(y)}{\partial y} = p_1(x)p_2(y). \quad (2.34)$$

Зависимые случайные величины. Две СВ называются зависимыми, если все связанные с ними события, например $\{X < x\}$ и $\{Y < y\}$, $\{X = x\}$ и $\{Y = y\}$ и т. д., также зависимы.

Если СВ X и Y, образующие систему, зависимы, то функции распределения выражаются через соответствующие условные функции распределения:

$$F(x, y) = P\{X < x, Y < y\} = P\{X < x\}P\{Y < y|X < x\} = \\ = F_1(x)F_2(y|x), \quad (2.35)$$

$$F(x, y) = P\{X < x, Y < y\} = P\{Y < y\}P\{X < x|Y < y\} = \\ = F_1(Y)F_2(x|y). \quad (2.36)$$

Для *дискретных* СВ на практике чаще используют другую форму записи условного закона, в которой фиксируют значения вероятностей СВ, например $p_{ij} = p_{y_j}p_{x_i|y_j}$.

Для *непрерывных* систем СВ теорема умножения чаще записывается в терминах плотностей распределения:

$$p(x, y) = p_1(x)p_2(y|x) = p_2(y)p_1(x|y). \tag{2.37}$$

Числовые характеристики системы двух случайных величин

Начальным моментом (k, s)-го порядка системы СВ (X, Y) называется математическое ожидание произведения

$$\alpha_{k,s} = M[X^k Y^s]. \tag{2.38}$$

Центральным моментом (k, s)-го порядка системы СВ (X, Y) называется математическое ожидание произведения центрированных СВ:

$$\mu_{k,s} = M\left[\overset{\circ}{X}{}^k \overset{\circ}{Y}{}^s\right], \tag{2.39}$$

где $\overset{\circ}{X} = X - m_x$; $\overset{\circ}{Y} = Y - m_y$.

Для системы двух дискретных СВ

$$\alpha_{k,s} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i^k y_j^s p_{ij}; \tag{2.40}$$

$$\mu_{k,s} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (x_i - m_x)^k (y_j - m_y)^s p_{ij}. \tag{2.41}$$

Для системы двух непрерывных СВ

$$\alpha_{k,s} = \int_{-\infty}^{\infty} x^k y^s p(x, y)dxdy; \tag{2.42}$$

$$\alpha_{1,1} = \int_{-\infty}^{\infty} xyp(x, y)dxdy = Kv_{xy} \tag{2.43}$$

— ковариационный момент (ковариация) СВ (X, Y);

$$\mu_{k,s} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^k (y - m_y)^s p(x, y)dxdy \tag{2.44}$$

На практике чаще используют начальный момент первого порядка и вторые центральные моменты:

$$\alpha_{1,0} = M\left[X^1 Y^0\right] = M\left[X\right] = m_x;$$

$$\alpha_{0,1} = M\left[X^0 Y^1\right] = M\left[Y\right] = m_y;$$

$$\mu_{2,0} = M\left[\overset{\circ}{X}{}^2 \overset{\circ}{Y}{}^0\right] = D_x \text{ — дисперсия СВ } X;$$

$$\mu_{0,2} = M\left[\overset{\circ}{X}{}^0 \overset{\circ}{Y}{}^2\right] = D_y \text{ — дисперсия СВ } Y;$$

$$\mu_{1,1} = M\left[\overset{\circ}{X}{}^1 \overset{\circ}{Y}{}^1\right] = Kr_{xy} \text{ — корреляционный момент (корреляция) СВ } (X,\ Y).$$

Очевидно, что $Kr_{xy} = Kr_{yx}$, $Kr_{xx} = D_x$, $Kr_{yy} = D_y$.

Для независимых СВ $Kr_{xy} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x - m_x)(y - m_y)\,p_1(x)\,p_2(y)\times$

$\times\, dxdy = 0.$

Коэффициент корреляции $\rho_{xy} = Kr_{xy}/(\sigma_x\sigma_y)$.

Если корреляция СВ $Kr_{xy} = 0$, то величины называются некоррелированными. Но из некоррелированности СВ не следует их независимость.

Условные числовые характеристики системы случайных величин. Регрессия

Условным математическим ожиданием одной из систем СВ называется ее математическое ожидание, вычисленное на основе условного закона распределения. В частности, для системы двух дискретных СВ

$$\mathrm{M}\left[Y\,|x_i\right] = m_{y|x_i} = \sum_{j=1}^{m} y_j\, p_{y_j|x_i}; \tag{2.45}$$

$$\mathrm{M}\left[X\,|y_j\right] = m_{x|y_j} = \sum_{i=1}^{m} x_i\, p_{x_i|y_j}, \tag{2.46}$$

где $p_{y_j|x_i} = P\{Y = y_j\,|X = x_i\}$; $p_{x_i|y_j} = P\{X = x_i\,|Y = y_j\}$.

Для системы двух непрерывных СВ

$$\mathrm{M}\left[Y\middle|x\right] = m_{y|x} = \int_{-\infty}^{\infty} y p_2\left(y\middle|x\right) dy; \tag{2.47}$$

$$\mathrm{M}\left[X\middle|y\right] = m_{x|y} = \int_{-\infty}^{\infty} x p_1\left(x\middle|y\right) dx. \tag{2.48}$$

Условное математическое ожидание $\mathrm{M}\left[Y\middle|x\right] = m_{y|x}$ СВ Y при заданном $X = x$ называется *регрессией Y на x*, соответственно $\mathrm{M}\left[X\middle|y\right] = m_{x|y}$ называется *регрессией X на y.*

Графики зависимостей $m_{y|x}$ от x и $m_{x|y}$ от y называются *кривыми регрессии.*

Закон распределения и числовые характеристики случайного вектора

Закон распределения системы n СВ — случайного вектора $\vec{X} = \left(X_1, X_2, ..., X_n\right)^T$ — определяется функцией распределения в виде

$$F\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = P\left\{X_1 < x_1,\ X_2 < x_2, ..., X_n < x_n\right\} =$$

$$= P\left\{\prod_{i=1}^{n} X_i < x_i\right\}. \tag{2.49}$$

Свойства ФР:

1) $F\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ — неубывающая функция;

2) если хотя бы один из аргументов обращается в $-\infty$, то ФР равна нулю;

3) ФР подсистемы СВ $\left(X_1, X_2, ..., X_k\right)$ системы $\left(X_1, X_2, ..., X_k, ..., X_n\right)$ получается, если принять все остальные аргументы равными $+\infty$, т. е.

$$F_{1,2,...,k}\left(x_1, x_2, ..., x_k\right) = F\left(x_1, x_2, ..., x_k, +\infty, ..., +\infty\right);$$

4) функция $F\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ непрерывна слева по каждому из аргументов;

5) если СВ независимы, то $F(x_1, x_2, ..., x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_i(x_i)$.

Плотностью распределения (*совместной плотностью*) системы непрерывных СВ называется n-я смешанная производная вида

$$p(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 ... \partial x_n}. \qquad (2.50)$$

Свойства плотности распределения:

1) $p(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0$;

2) $\int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, x_2, ..., x_n) dx_1 dx_2 ... dx_n = 1$.

Условной плотностью распределения подсистемы СВ $(X_1, X_2, ..., X_k)$, входящей в систему $(X_1, X_2, ..., X_k, ..., X_n)$, называется плотность распределения этой подсистемы при условии, что все остальные СВ приняли определенные значения: $X_{k+1} = x_{k+1}$, $X_{k+2} = x_{k+2}, ..., X_n = x_n$ или

$$p(x_1, x_2, ..., x_k | x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_n) = \frac{p(x_1, x_2, ..., x_n)}{p_{k+1,k+2,...,n}(x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_n)}. \qquad (2.51)$$

Плотность распределения системы n СВ можно представить в виде

$$p(x_1, x_2, ..., x_n) = p_1(x_1) p_{2|1}(x_2|x_1) p_{3|1,2}(x_3|x_1, x_2) ... p_{n|1,2,...,n-1}(x_n|x_1, x_2, ..., x_{n-1}). \qquad (2.52)$$

Числовые характеристики системы n случайных величин

1. Математические ожидания:

$$m_1 = \mathrm{M}[X_1];\ m_2 = \mathrm{M}[X_2];\ ... m_n = \mathrm{M}[X_n],$$

причем

$$m_i = \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} x_i p(x_1, x_2, ..., x_n) dx_1 dx_2 ... dx_n. \qquad (2.53)$$

2. Дисперсии:

$$D_1 = D[X_1];\ \ D_2 = D[X_2];\ \ \ldots D_n = D[X_n],$$

причем

$$D_i = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - m_i)^2 p(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n. \qquad (2.54)$$

3. Корреляции:

$$Kr_{ij} = \mathrm{M}\left[\overset{\circ}{X}_i \overset{\circ}{X}_j\right],\ \ i \neq j;\ \ Kr_{ij} = Kr_{ji},$$

причем $D_i = D[X_i] = M\left[\overset{\circ}{X}_i^2\right] = Kr_{ii},\ \ i = \overline{1, n};$

$$Kr_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - m_i)(x_j - m_j) p(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n. \qquad (2.55)$$

Матрица корреляций (*корреляционная матрица*) имеет вид

$$\left\| Kr_{ij} \right\| = \begin{pmatrix} Kr_{11} & \ldots & Kr_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ Kr_{n1} & \ldots & Kr_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (2.56)$$

Поскольку матрица корреляций симметрична, т. е. $Kr_{ij} = Kr_{ji}$, то в некоторых случаях ее представляют как «треугольную»:

$$\left\| Kr_{ij} \right\| = \begin{pmatrix} Kr_{11} & \ldots & Kr_{1n} \\ & \ldots & \ldots \\ & & Kr_{nn} \end{pmatrix}.$$

Если СВ являются попарно некоррелированными, т. е. $Kr_{ij} = 0$, тогда получаем диагональную матрицу

$$\left\| Kr_{ij} \right\| = \begin{pmatrix} Kr_{11} & 0 & 0 \\ & \ldots & 0 \\ & & Kr_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матрица коэффициентов корреляции из элементов

$$\rho_{ij} = Kr_{ij} \big/ \left(\sigma_i \sigma_j\right) = Kr_{ij} \big/ \sqrt{D_i D_j} = Kr_{ij} \big/ \sqrt{Kr_{ii} Kr_{jj}}$$

имеет вид

$$\left\| \rho_{ij} \right\| = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \rho_{1n} \\ & \cdots & \cdots \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

Если СВ попарно некоррелированы, то матрица единичная:

$$\left\| \rho_{ij} \right\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & \cdots & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

Удобство использования моментов в том, что на практике закон распределения определить очень сложно, особенно для системы СВ. Но оценки значений моментов относительно просто определяются на основе экспериментов.

Условное математическое ожидание — регрессия. Например, условное математическое ожидание СВ X_1

$$M\left[X_1 \middle| x_2, x_3, \ldots, x_n \right] = m_{x_1 | x_2,\ 3x\ldots,\ nx} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_1 p\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) dx_1}{p_{2,3,\ldots,n}\left(x_2, x_3, \ldots, x_n\right)}. \quad (2.57)$$

Говорят: $m_{x_1 | x_2, x_3, \ldots, x_n}$ — это регрессия X_1 на $x_2, x_3, \ldots, x_n$ — поверхность в n-мерном пространстве $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Многомерное нормальное распределение. Пусть $\vec{X} = \left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)^T$ — случайный вектор системы n СВ, подчиняющихся нормальному закону распределения. Тогда его плотность вероятности определяется функцией вида

$$p(\vec{X}) = \frac{\exp\left[-\frac{1}{2} (\vec{X} - \vec{m})^T \left\| Kr_{i,j} \right\|^{(-1)} (\vec{X} - \vec{m}) \right]}{(2\pi)^{n/2} \left| Kr_{i,j} \right|^{1/2}} \quad (2.58)$$

или

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{|Kr_{ij}|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}(x_i - m_i)(x_j - m_j)\right\}, \qquad (2.59)$$

где m_i — математическое ожидание СВ X_i, $i = \overline{1, n}$;

$|Kr_{ij}|$ определитель корреляционной матрицы $\|Kr_{ij}\|$ системы n СВ,

$$|Kr_{ij}| = \begin{vmatrix} Kr_{11} & Kr_{12} & \ldots & Kr_{1n} \\ Kr_{21} & Kr_{22} & \ldots & Kr_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ Kr_{n1} & Kr_{n2} & \ldots & Kr_{nn} \end{vmatrix}; \qquad (2.60)$$

C_{ij} — элементы матрицы, обратной корреляционной матрице $\|Kr_{ij}\|$, $C_{ij} = A_{ij} / |Kr_{ij}|$; A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента Kr_{ij} ковариационной матрицы.

По диагонали корреляционной матрицы располагаются дисперсии D_i.

Обратная матрица для общего случая определяется выражением

$$\|Kr_{ij}\|^{-1} = \|C_{ij}\| = \frac{1}{|Kr_{ij}|}\|M_{ij}(-1)^{i+j}\|^T, \qquad (2.61)$$

где M_{ij} — минор элемента Kr_{ij} корреляционной матрицы.

Для частного случая $n = 2$:

$$\|Kr_{ij}\| = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix};$$

$$\|Kr_{ij}\|^{-1} = \|C_{ij}\| = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}^T =$$

$$= \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

При вычислении обратной матрицы операцию транспонирования можно не выполнять, так как матрица корреляций симметрична, т. е. $Kr_{ij} = Kr_{ji}$.

Выведем выражение для двумерного нормального распределения СВ X и Y, у которого заданы математические ожидания m_x и m_y, а также корреляционная матрица:

$$\left\| Kr_{xy} \right\| = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & Kr_{xy} \\ Kr_{yx} & \sigma_y^2 \end{pmatrix}.$$

Запишем обратную матрицу:

$$\left\| Kr_{ij} \right\|^{(-1)} = \left\| C_{ij} \right\| = \frac{1}{\left| Kr_{xy} \right|} \begin{pmatrix} \sigma_y^2 & -Kr_{xy} \\ -Kr_{yx} & \sigma_x^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sigma_x^2 \sigma_y^2 - \sigma_x^2 \sigma_y^2 \rho_{xy} \rho_{yx}} \begin{pmatrix} \sigma_y^2 & -\sigma_x \sigma_y \rho_{xy} \\ -\sigma_x \sigma_y \rho_{yx} & \sigma_x^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sigma_x^2 \sigma_y^2 \left(1 - \rho_{xy} \rho_{yx}\right)} \begin{pmatrix} \sigma_y^2 & -\sigma_x \sigma_y \rho_{xy} \\ -\sigma_x \sigma_y \rho_{yx} & \sigma_x^2 \end{pmatrix}.$$

С учетом формулы (2.59) получим

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi \sigma_x \sigma_y \sqrt{\left(1 - \rho_{xy}^2\right)}} \exp\left\{ -\frac{1}{2\left(1 - \rho_{xy}^2\right)} \times \right.$$

$$\left. \times \left[\frac{\left(x - m_x\right)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2\rho_{xy}\left(x - m_x\right)\left(y - m_y\right)}{\sigma_x \sigma_y} + \frac{\left(y - m_y\right)^2}{\sigma_y^2} \right] \right\}. \qquad (2.62)$$

2.2. Элементы теории случайных процессов

Случайной функцией $g(t, \omega)$, $t \in T$, $\omega \in \Omega$, называется отображение вида $g : \Omega \to \Re^n$ пространства элементарных событий Ω в пространство $\Re^n$ (декартово произведение множеств действительных чисел), зависящее от параметра t.

Декартово произведение множеств действительных чисел — множество из n упорядоченных наборов действительных чисел, например $\Re^3$ — множество из трех действительных чисел.

Если аргумент t интерпретируется как время, то вместо термина «случайная функция» используют термин «*случайный процесс*».

Если аргумент случайной функции является вектором, например $\vec{r} = (x, y, z, t)^T$, то говорят о *случайном поле*.

Если $n = 1$, то случайный процесс $g(t, \omega)$, $t \in T$, называется *скалярным случайным процессом*.

При $n \geq 2$ случайный процесс называется *векторным случайным процессом* или *n-мерным случайным процессом*, который можно записать в виде $g(t, \omega) = \left(g_1(t, \omega), g_2(t, \omega) \ldots g_n(t, \omega)\right)^T$. Скалярные случайные процессы $g_i(t, \omega)$, $t \in T$, называются координатными случайными процессами.

При любом фиксированном значении параметра $t \in T$ случайный векторный процесс является случайным вектором, называемым сечением этого процесса.

Если зафиксировать элементарное событие $\omega \in \Omega$, то $g(t, \omega)$ является неслучайной функцией параметра t, которую называют траекторией случайного процесса или его реализацией. Для реализаций можно использовать обозначение $g(t)$, опуская параметр ω, указывающий на принадлежность пространству элементарных событий.

Введем следующую классификацию:

1) скалярный случайный процесс — описывается одномерной случайной функцией $g(t)$, область значений которой представляет собой множество действительных чисел;

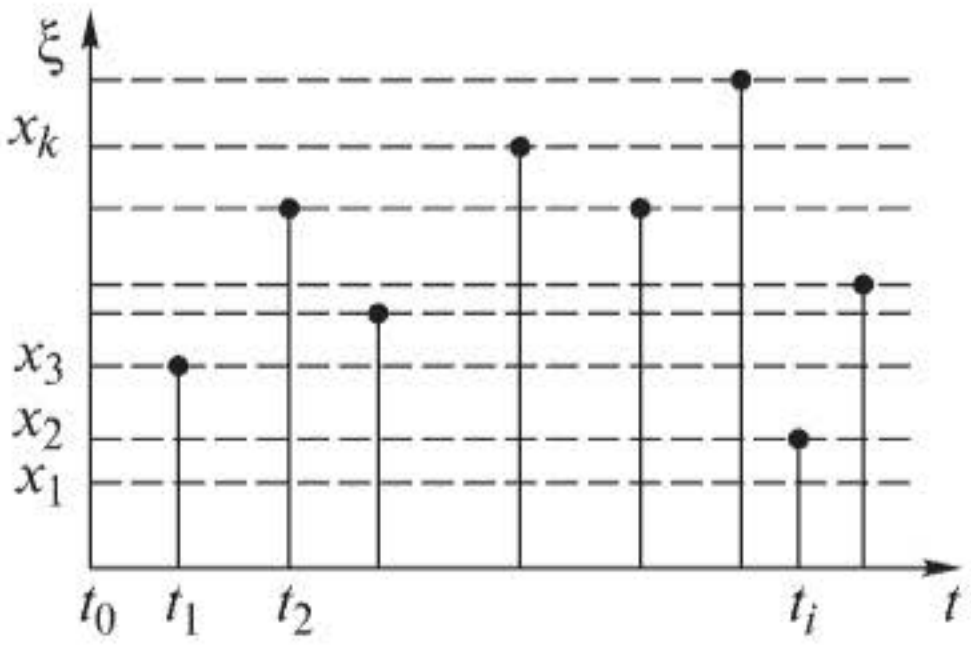
2) векторный случайный процесс — описывается одномерной случайной функцией $g(t)$, область значений которой представляет множество n упорядоченных наборов действительных чисел;

3) скалярное случайное поле — описывается многомерной случайной функцией $g(\vec{r})$, область значений которой представляет собой множество действительных чисел;

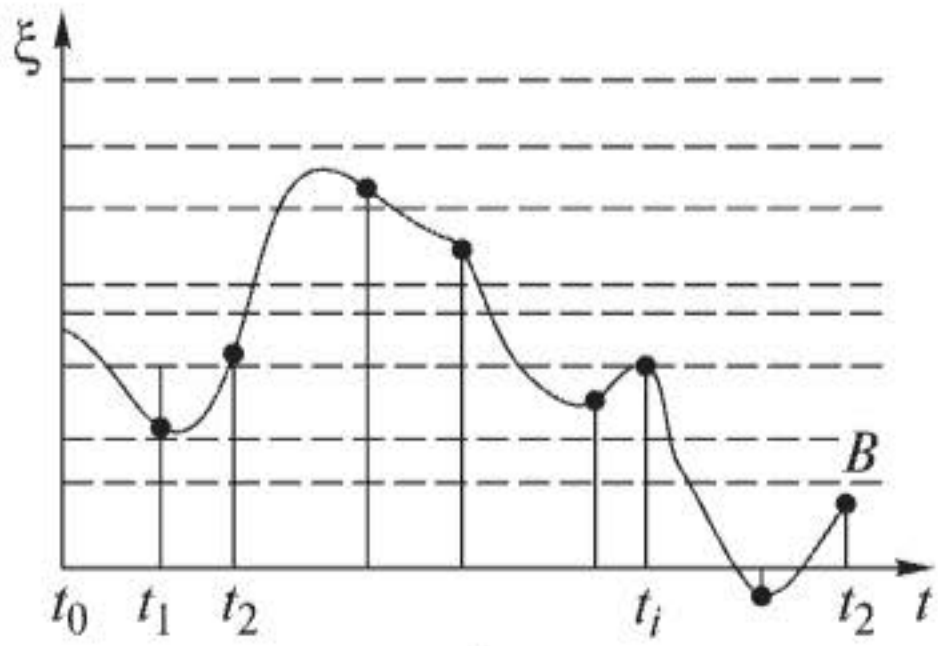
4) векторное случайное поле — описывается многомерной случайной функцией $g(\vec{r})$, область значений которой представляется множеством n упорядоченных наборов действительных чисел.

Виды случайных процессов (полей) (рис. 2.2):

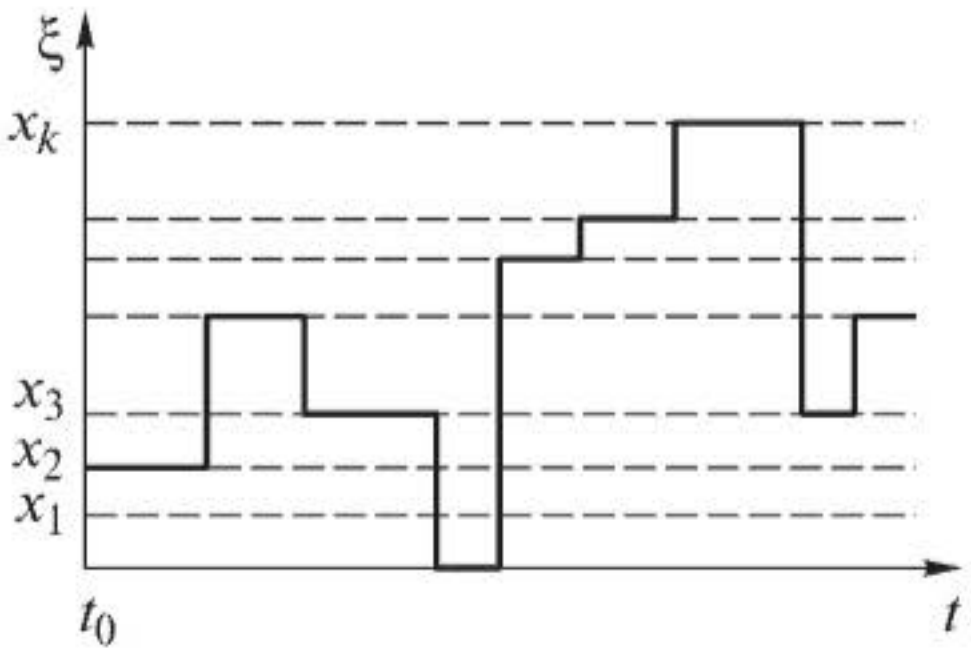
• *дискретная случайная последовательность* (дискретный процесс в дискретном времени) (рис. 2.2, *а*) — случайный процесс, у которого область определения и область значений — дискретные



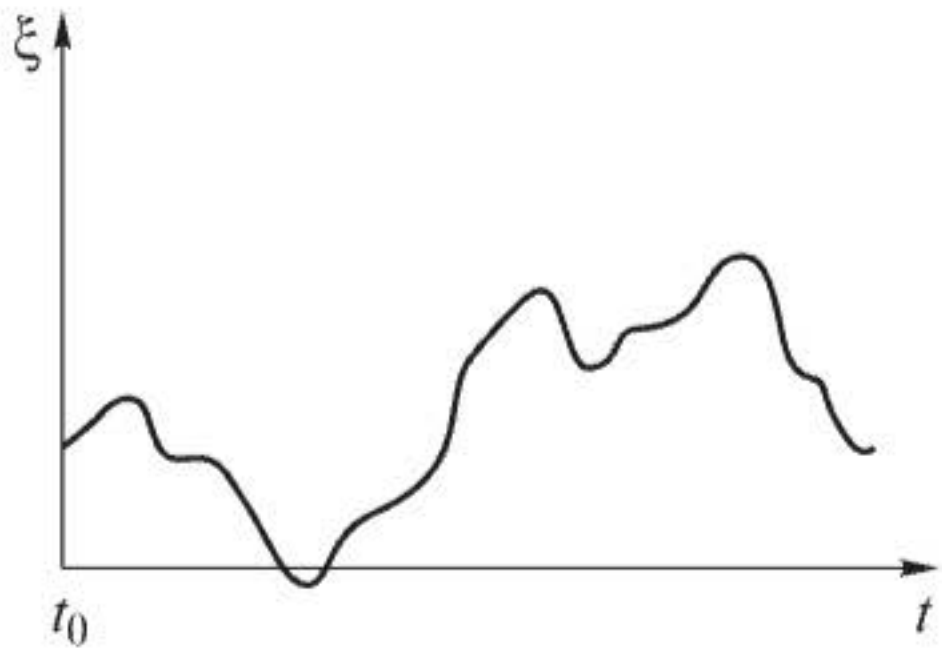
а



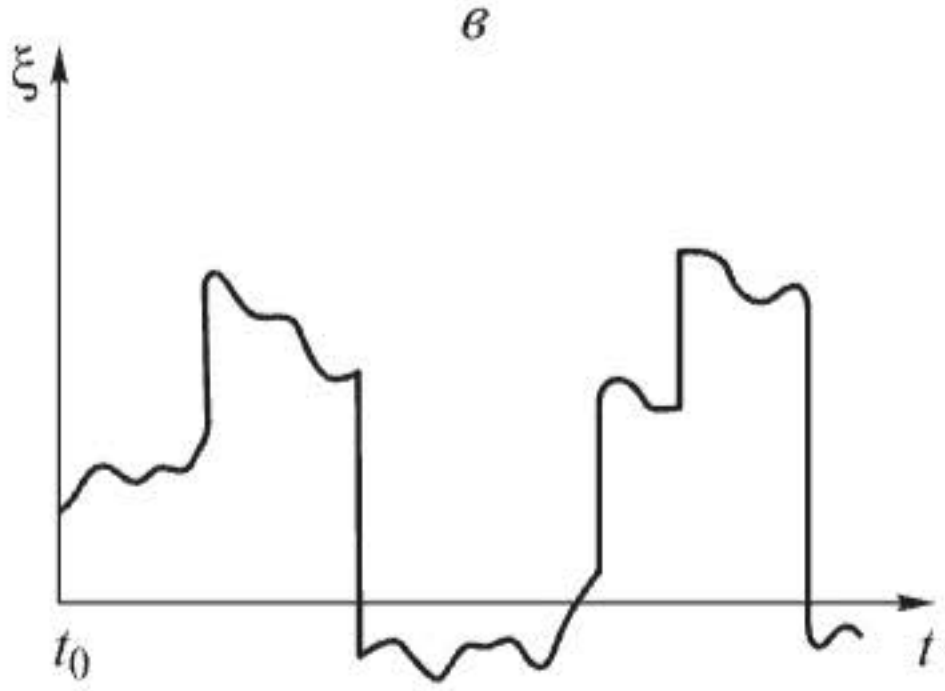
б



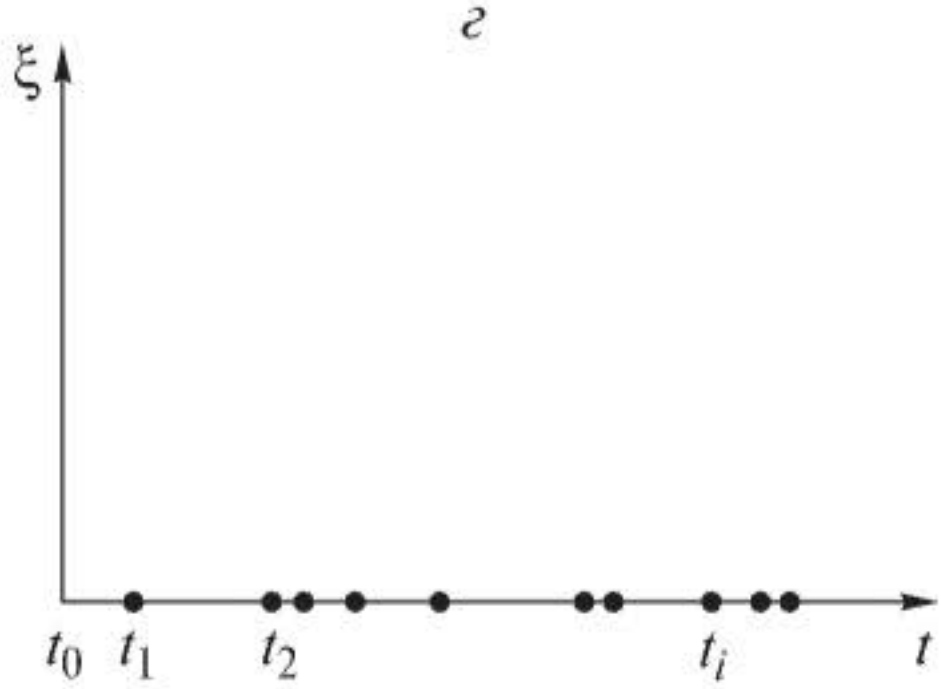
в



г



д



е

Рис. 2.2. Виды случайных процессов

множества. Такие случайные процессы могут быть получены на выходе АЦП путем дискретизации с последующим квантованием;

• *случайная последовательность* (рис. 2.2, *б*) — случайный процесс, у которого область определения — дискретное множество, а область значений — непрерывное множество;

• *дискретный (разрывный) случайный процесс* (рис. 2.2, *в*) — случайный процесс, у которого область определения — непрерывное множество, а область значений — дискретное множество;

• *непрерывный* (рис. 2.2, *г*) *и непрерывнозначный* (рис. 2.2, *д*) *случайные процессы* — это процессы, у которых область определения и область значений — непрерывные множества. У непрерывнозначного случайного процесса могут быть разрывы первого рода;

• *случайный точечный процесс (поток)* (рис. 2.2, *е*) — последовательность точек, расположенных случайным образом, например по оси времени.

Описание случайных функций и полей

Ниже приведены функции распределения.

1. *Одномерная функция распределения случайного процесса.*

Если зафиксировать аргумент $t \in T$, то можно ввести в рассмотрение *одномерную функцию распределения скалярного случайного процесса*:

$$F(x_1; t_1) = P\left[g(t_1, \omega) < x_1\right] = \int_{-\infty}^{x_1} p_g(y; t_1)\,dy, \qquad (2.63)$$

где $p_g(x_1; t_1) = \dfrac{\partial F(x_1; t_1)}{\partial x_1}$ — *одномерная плотность вероятности скалярного* случайного процесса $g(t, \omega)$, $t \in T$.

Если зафиксировать значения t_k, $k = \overline{1, n}$, аргумента $t \in T$, то вводят в рассмотрение конечномерную (n-мерную) *функцию распределения случайного процесса*

$$F_n(x_1, \ldots, x_n;\ t_1, \ldots, t_n) = P\left[g(t_k, \omega) < x_k, k = \overline{1, n}\right] =$$

$$= \int_{-\infty}^{x_1} \ldots \int_{-\infty}^{x_n} p_n(y_1, \ldots, y_n;\ t_1, \ldots, t_n)\,dy_1 \ldots dy_n \qquad (2.64)$$

и конечномерную (n-мерную) *плотность вероятности случайного процесса* $p_n(x_1, \ldots, x_n;\ t_1, \ldots, t_n)$.

2. *Многомерная плотность вероятности* $p_n(x_1, \ldots, x_n;\ t_1, \ldots, t_n)$ позволяет судить о связи между вероятными значениями случайного процесса в n произвольных моментах времени. Но оперировать с многомерными плотностями крайне неудобно.

Для гауссовых и марковских случайных процессов n-мерные плотности вероятности выражаются через двумерные.

3. Вместо плотности вероятности можно использовать *характеристическую функцию*

$$\Phi\left(j\nu_1, j\nu_2, \ldots, j\nu_n; t_1, t_2, \ldots, t_n\right) =$$

$$= \mathrm{M}\left\{\exp\left[j \cdot 2\pi\left(g_1\nu_1 + g_2\nu_2 + \ldots + g_n\nu_n\right)\right]\right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[j \cdot 2\pi\left(x_1\nu_1 + x_2\nu_2 + \ldots + x_n\nu_n\right)\right] \times$$

$$\times p_n\left(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n\right) dx_1 \ldots dx_n, \qquad (2.65)$$

которая представляет собой преобразование Фурье плотности вероятности.

Моментные и корреляционные функции

На практике для описания свойств случайных процессов и полей используют моментные и корреляционные функции. Различают начальные и центральные моментные функции.

Начальные моментные функции случайного процесса $\xi(t)$:

$$m_{\nu_1}(t) = M\left\{g^{\nu 1}(t)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^{\nu 1} p(x; t) dx; \qquad (2.66)$$

$$m_{\nu_1\,\nu_2\ldots\nu_n}\left(t_1, t_1, \ldots, t_n\right) = M\left\{g^{\nu 1}\left(t_1\right) g^{\nu 2}\left(t_2\right) \ldots \mathrm{g}^{\nu_n}\left(t_n\right)\right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_1^{\nu 1} x_2^{\nu 2} \ldots x_n^{\nu n} p_n\left(x_1, x_2, \ldots, x_1; t_1, t_1, \ldots, t_n\right) dx_1 \ldots dx_n$$

— n-мерная моментная функция $\left(\nu_1 + \nu_1 + \ldots + \nu_n\right)$-го порядка.

Центральные моментные функции (моменты):

$$\mu_{\nu_1\,\nu_2\ldots\nu_n}\left(t_1, t_1, \ldots, t_n\right) = M\left\{\left[\dot{g}\left(t_1\right)\right]^{\nu 1}\left[\dot{g}\left(t_2\right)\right]^{\nu 2} \ldots \left[\dot{g}\left(t_n\right)\right]^{\nu n}\right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[x_1 - m_1\left(t_1\right)\right]^{\nu 1} \ldots \left[x_1 - m_1\left(t_1\right)\right]^{\nu n} \times$$

$$\times p_n\left(x_1, x_2, \ldots, x_1; t_1, t_1, \ldots, t_n\right) dx_1 \ldots dx_n. \qquad (2.67)$$

Математическое ожидание скалярного случайного процесса:

$$m_g(t) = m_1(t) = M\left[g(t)\right] = \left\langle g(t)\right\rangle = \int_{\Re} xp(x;t)dx. \qquad (2.68)$$

Ковариационная функция скалярного случайного процесса:

$$Kv_\xi(t_1,t_2) = m_{11}(t_1,t_2) = M\left\{g(t_1)g(t_2)\right\} = M\left\{g(t_1)g(t_2)\right\} =$$
$$= \iint_{\Re} x_1x_2p_\xi(x_1,x_2;\,t_1,t_2)dx_1dx_2. \qquad (2.69)$$

Корреляционная функция вводится для центрированного случайного процесса:

$$Kr_g(t_1,t_2) = \mu_{11}(t_1,t_2) = M\left\{\left(g(t_1)-m_g(t_1)\right)\left(g(t_2)-m_g(t_2)\right)\right\} =$$
$$= \left\langle\left[g(t_1)-m_g(t_1)\right]\left[g(t_2)-m_g(t_2)\right]\right\rangle =$$
$$= \iint_{\Re}\left(x_1-m_g(t_1)\right)\left(x_2-m_g(t_2)\right)p_g(x_1,x_2;\,t_1,t_2)dx_1dx_2. \qquad (2.70)$$

Существует связь между ковариационной и корреляционной функциями:

$$Kv_\xi(t_1,t_2) = Kr_g(t_1,t_2) + m_g(t_1)m_g(t_2). \qquad (2.71)$$

Свойства нормальных случайных процессов и полей в достаточной степени описываются математическим ожиданием и корреляционной функцией. Раздел теории случайных процессов, посвященный изучению свойств, которые определяются этими характеристиками, называется *корреляционной теорией*.

Понятие стационарности случайного процесса

Случайный процесс называется *стационарным в узком смысле*, если для любых t_k и $\tau \in \Re$ имеют место тождества:

$$F_n(x_1,\ldots,x_n;\,t_1,\ldots,t_n) = F_n(x_1,\ldots,x_n;\,t_1+\tau,\ldots,t_n+\tau); \qquad (2.72)$$

$$p_n(x_1,\ldots,x_n;\,t_1,\ldots,t_n) = p_n(x_1,\ldots,x_n;\,t_1+\tau,\ldots,t_n+\tau). \qquad (2.73)$$

Тогда

$$M\{g(t)\} = m_g = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx; \tag{2.74}$$

$$Kr_g(t_1, t_2) = Kr_g(t_1 - t_2) = Kr_g(\tau) =$$
$$= M\left\{\left(g(t) - m_g\right)\left(g(t+\tau) - m_g\right)\right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left(x_1 - m_g\right)\left(x_2 - m_g\right)p_2(x_1, x_2; \tau)dx_1dx_2 = Kv_g(\tau) - m_g^2. \tag{2.75}$$

Случайный процесс называется *стационарным в широком смысле*, если выполняются условия (2.74) и (2.75).

Следует отметить, что из стационарности в широком смысле не следует стационарность в узком смысле.

Для случайных полей вместо стационарности используют термин «однородность».

Из условия (2.75) следует, что для стационарного случайного процесса дисперсия постоянна:

$$D_g = Kr_g(t_1 - t_1) = Kr_g(0) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(x_1 - m_g\right)^2 p(x_1)dx_1. \tag{2.76}$$

Для трехмерного случайного поля $g(\vec{r})$, $\vec{r} = (x, y, t)^T$, корреляционная функция имеет вид

$$Kr_g(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = Kr_g(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = Kr_g(\Delta\vec{r}) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(g_1 - m_\xi\right)\left(g_2 - m_\xi\right)p_2(g_1, g_2; \Delta\vec{r})dg_1dg_2 = Kv_g(\Delta\vec{r}) - m_g^2, \tag{2.77}$$

где $\Delta\vec{r} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, t_2 - t_1)^T = (\xi, \eta, \tau)^T$.

Эргодические стационарные процессы и поля

Стационарный процесс называется эргодическим (обладает эргодическим свойством), если усреднение по ансамблю можно заменить усреднением по реализации:

$$m_g = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T g(t)dt; \tag{2.78}$$

$$D_g = \lim_{x\to T} \frac{1}{T} \int_0^T \left[g(t) - m_g \right]^2 dt; \tag{2.79}$$

$$Kv_g(\tau) = \lim_{x\to T} \frac{1}{T} \int_0^T g(t+\tau)g(t)dt; \tag{2.80}$$

$$Kr_g(\tau) = \lim_{x\to T} \frac{1}{T} \int_0^T \left[g(t+\tau) - m_g \right]\left[g(t) - m_g \right]dt. \tag{2.81}$$

Аналогично для случайных полей:

$$m_g = \lim_{\substack{X\to\infty \\ Y\to\infty}} \frac{1}{XY} \int_{-X/2}^{X/2} \int_{-Y/2}^{Y/2} g(x, y)dxdy; \tag{2.82}$$

$$D_g = \lim_{\substack{X\to\infty \\ Y\to\infty}} \frac{1}{XY} \int_{-X/2}^{X/2} \int_{-Y/2}^{Y/2} \left[g(t) - m_g \right]^2 dxdy; \tag{2.83}$$

$$Kv_g(\xi, \eta) = \lim_{\substack{X\to\infty \\ Y\to\infty}} \frac{1}{XY} \int_{-X/2}^{X/2} \int_{-Y/2}^{Y/2} g(x+\xi, y+\eta)\, g(x, y)dxdy. \tag{2.84}$$

$$Kr_g(\xi, \eta) =$$

$$= \lim_{\substack{X\to\infty \\ Y\to\infty}} \frac{1}{XY} \int_{-X/2}^{X/2} \int_{-Y/2}^{Y/2} \left[g(x+\xi, y+\eta) - m_g \right]\left[g(x, y \right) + m_g \right]dxdy. \tag{2.85}$$

Спектральный анализ случайных процессов

Для стационарного в широком смысле случайного процесса спектральная плотность определяется соотношениями

$$\tilde{K}r_g(\nu_t) = \int_{-\infty}^{\infty} Kr_g(\tau)\exp(-i\cdot 2\pi\nu_t\tau)d\tau; \tag{2.86}$$

$$Kr_g(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{K}r_g(\nu_t)\exp(i \cdot 2\pi\nu_t\tau)d\nu_t; \qquad (2.87)$$

$$\tilde{K}v_g(\nu_t) = \tilde{K}r_g(\nu_t) + m_g^2\delta(\nu_t). \qquad (2.88)$$

Это известные формулы Хинчина — Винера.
Если в формуле (2.87) принять $\tau = 0$, то получим

$$D_g = Kr_g(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{K}r_g(\nu_t)d\nu_t. \qquad (2.89)$$

Свойства спектральной плотности:

1) из выражения (2.89) следует $\tilde{K}r_g(\nu_t) \geq 0$;

2) спектральная плотность $\tilde{K}r_g(\nu_t)$ — вещественная функция, так как $Kr_g(\tau)$ четная функция, то $\tilde{K}r_g(\nu_t) = \tilde{K}r_g(-\nu_t)$.

Введенное понятие «спектральная плотность» определено как для положительных, так и для отрицательных частот. В радиотехнике также используют понятие «односторонняя» или «физическая» спектральная плотность, которая определена для положительных частот:

$$\tilde{K}r_{1g}(\nu_t) = \tilde{K}r_g(\nu_t) + \tilde{K}r_g(-\nu_t) = 2\tilde{K}r_g(\nu_t), \ \nu_t \geq 0. \qquad (2.90)$$

Примеры моделей случайных процессов и полей

Примером случайных процессов являются помехи, действующие в тракте ОЭП, в частности аддитивный шум приемника излучения. Рассмотрим математические модели, используемые для описания такой помехи.

Модель белого шума. Пусть помеха (шум) представляет собой стационарный случайный процесс $n(t)$ с корреляционной функцией:

$$Kr_n(\tau) = N_0\delta(\tau). \qquad (2.91)$$

Спектральная плотность такой помехи

$$\tilde{K}r_n(\nu_t) = F\{Kr_n(\tau)\} = N_0. \qquad (2.92)$$

Дисперсия этого случайного процесса $D_n = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{R}_n(\nu) d\nu \to \infty$.

Физически этого не может быть. Поэтому белый шум — это идеализированная модель — математическая абстракция, более корректной является модель квазибелого шума.

Модель квазибелого шума. Пусть спектральная плотность стационарного случайного процесса $n(t)$ определяется выражением

$$\tilde{K}r_n(\nu_t) = \begin{vmatrix} N_0, & |\nu_t| \le \nu_{tM} \\ 0, & |\nu_t| > \nu_{tM} \end{vmatrix} = N_0 \operatorname{rect}\left(\frac{\nu}{2\nu_{tM}}\right). \qquad (2.93)$$

Тогда корреляционная функция будет иметь вид

$$Kr_n(\tau) = N_0 \cdot 2\nu_{tM} \operatorname{sinc}(2\pi\nu_{tM}\tau) = \sigma_n^2 \operatorname{sinc}(2\pi\nu_{tM}\tau), \qquad (2.94)$$

где $\sigma_n^2 = D_n$ — дисперсия помехи.

Если $\nu_{t\,M} > \nu_{t\,S}$ ($\nu_{t\,S}$ — полоса пропускания электронного тракта ОЭП), то эта модель эквивалентна модели белого шума.

Такую модель можно использовать для описания аддитивной помехи матричного приемника излучения (МПИ) при условии, что отсутствует разброс параметров и характеристик чувствительных элементов МПИ и взаимное влияние между ними. При таком допущении дисперсия шума всех элементов одинакова и равна σ_n^2. Логично предположить, что пространственный интервал корреляции помехи не превышает расстояний T_x и T_y между соседними чувствительными элементами, а временно́й интервал корреляции не превышает периода T_k следования кадров при считывании сигналов, накопленных в МПИ. Следовательно, $\nu_{xM} = 1/T_x$, $\nu_{yM} = 1/T_y$ и $\nu_{tM} = 1/T_k$.

Тогда корреляционная функция и спектральная плотность случайного поля помехи на выходе МПИ описывается следующими выражениями:

$$Kr_n(\xi, \eta, \tau) = \sigma_n^2 \operatorname{sinc}(\pi\nu_{xM}\xi)\operatorname{sinc}(\pi\nu_{yM}\eta)\operatorname{sinc}(\pi\nu_{tM}\tau); \qquad (2.95)$$

$$\tilde{K}r_n(\nu_x, \nu_y, \nu_t) = N_0 \operatorname{rect}\left(\frac{\nu_x}{\nu_{xM}}, \frac{\nu_y}{\nu_{yM}}, \frac{\nu_t}{\nu_{tM}}\right), \qquad (2.96)$$

где $N_0 = \sigma_n^2 T_x T_y T_k$.

3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИГНАЛОВ ЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ

3.1. Преобразование детерминированных сигналов

3.1.1. Понятие линейной системы

Линейной называется система, преобразующая линейную комбинацию входных сигналов в линейную комбинацию выходных сигналов. Преобразование линейной системой входных $S^{\text{вх}}$ сигналов в выходные $S^{\text{вых}}$ описывается линейным оператором $P\{\cdot\}$.

Если на вход линейной системы поступает линейная комбинация сигналов

$$S^{\text{вх}}(x, y) = c_1 S_1(x, y) + c_2 S_2(x, y) + \ldots + c_n S_n(x, y), \quad (3.1)$$

то на выходе будет также линейная комбинация выходных сигналов:

$$S^{\text{вых}}(x, y) = P\{S^{\text{вх}}(x, y)\} =$$

$$= P\{c_1 S_1(x, y) + c_2 S_2(x, y) + \ldots + c_n S_n(x, y)\} =$$

$$= c_1 P\{S_1(x, y)\} + c_2 P\{S_2(x, y)\} + \ldots + c_n P\{S_n(x, y)\} =$$

$$= c_1 S_1^{\text{вых}}(x, y) + c_2 S_2^{\text{вых}}(x, y) + \ldots + c_n S_n^{\text{вых}}(x, y), \quad (3.2)$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — постоянные коэффициенты (действительные или комплексные).

Примечание. Оператором называется правило или алгоритм, определяющие последовательность действий при преобразовании сигнала (функции, описывающей сигнал). Примерами линейных операторов являются оператор дифференцирования, интегрирования, преобразования Фурье.

Особенность линейных систем заключается в том, что их реакцию (отклик) на какой-либо сложный сигнал можно выразить через отклики на элементарные типовые входные сигналы. Другими словами, реакция линейной системы на одновременное воздействие нескольких источников равна сумме реакций, вызываемых каждым источником, действующим отдельно.

Важным моментом при описании линейных систем является нахождение удобного способа разложения входного сигнала на элементарные сигналы. Удобно рассматривать входной сигнал в виде непрерывной суммы точечных источников излучения (в оптике) или бесконечно коротких импульсов (в электронике) с соответствующими амплитудами (весовыми коэффициентами). Математически точечный источник интерпретируется в виде дельта-функции Дирака. Используя фильтрующее свойство дельта-функции, входной сигнал $S^{\text{вх}}(x, y)$ можно представить в виде непрерывной комбинации смещенных точечных источников излучения так, что

$$S^{\text{вх}}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} S^{\text{вх}}(u, v)\,\delta(x-u, y-v)\,du\,dv = S^{\text{вх}}(x, y) \otimes \delta(x, y). \quad (3.3)$$

Пусть на вход линейной системы поступает сигнал $S^{\text{вх}}(x, y)$. Тогда выходной сигнал определяется выражением

$$S^{\text{вых}}(x, y) = P\{S^{\text{вх}}(x, y)\} = P\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} S^{\text{вх}}(u, v)\,\delta(x-u, y-v)\,du\,dv\right\}. \quad (3.4)$$

Используя определение линейности, можно переставить местами оператор интегрирования и оператор $P\{\cdot\}$, тогда

$$S^{\text{вых}}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} P\{S^{\text{вх}}(u, v)\,\delta(x-u, y-v)\}\,du\,dv.$$

Значения функции $S^{\text{вх}}(u, v)$ можно рассматривать как весовые коэффициенты дельтообразного источника, определенные для всех значений координат сигнала. Поскольку весовой множитель можно выносить за знак линейного оператора, то в результате получим

$$S^{\text{вых}}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} S^{\text{вх}}(u, v)\,P\{\delta(x-u, y-v)\}\,du\,dv. \quad (3.5)$$

Введем понятие «импульсный отклик».

Импульсный отклик — это реакция линейной системы на импульсный сигнал в виде дельта-функции, т. е.

$$H(x, y;\ u, v) = P\{\delta(x-u,\ y-v)\}. \tag{3.6}$$

Используя понятие импульсного отклика, сигнал на выходе линейной системы можно определить выражением

$$S^{\text{ВЫХ}}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} S^{\text{ВХ}}(u, v)\, H(x, y, u, v)\, du dv, \tag{3.7}$$

которое называется ***интегралом суперпозиции***.

Интеграл суперпозиции отражает тот факт, что линейная система полностью характеризуется совокупностью откликов на элементарные входные δ-образные сигналы.

Инвариантные линейные системы. В общем случае вид функции $H(x, y; u, v)$, описывающей импульсный отклик, зависит от координат (u, v) точек приложения входного δ-образного воздействия, так как при интегрировании выражения (3.7) вид функции $H(x, y; u, v)$ зависит от координат этих точек. Если же вид функции $H(x, y; u, v)$ не зависит от координат (u, v), то линейная система называется ***инвариантной***.

В частном случае оптическая система называется ***пространственно-инвариантной*** (***изопланарной***), если ее функция рассеяния $H(x', y'; u, v)$, определенная в плоскости изображения $x'y'$, зависит только от разности координат $(x'-\beta u)$ и $(y'-\beta v)$, т. е. $H(x', y', u, v) = H(x'-\beta u; y'-\beta v)$, где β — линейное увеличение оптической системы. Таким образом, оптическая система, создающая изображение, считается пространственно-инвариантной, если изображение точечного источника имеет одинаковый вид в пределах всего углового поля. Для пространственно-инвариантной оптической системы выражение (3.7) для интеграла суперпозиции принимает вид интеграла свертки:

$$S^{\text{ВЫХ}}(x', y') = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} S^{\text{ВХ}}(u, v)\, H(x'-\beta u, y'-\beta v)\, du dv =$$

$$= \frac{1}{\beta^2} S^{\text{ВХ}}\left(\frac{x'}{\beta}, \frac{y'}{\beta}\right) \otimes H(x', y'). \tag{3.8}$$

В общем случае двумерный сигнал на выходе пространственно-инвариантной линейной системы имеет вид

$$S^{\text{ВЫХ}}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} S^{\text{ВХ}}(u, v)H(x-u, y-v)\,du\,dv =$$

$$= S^{\text{ВХ}}(x, y) \otimes H(x, y). \qquad (3.9)$$

Электронная система называется инвариантной, если ее импульсный отклик $H(t;\tau)$ зависит только от интервала времени $t-\tau$, т. е. $H(t;\tau) = H(t-\tau)$. Сигнал на выходе такой инвариантной системы имеет вид

$$S^{\text{ВЫХ}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} S^{\text{ВХ}}(\tau)H(t-\tau)d\tau = S^{\text{ВХ}}(t) \otimes H(t). \qquad (3.10)$$

3.1.2. Передаточная функция линейной инвариантной системы

Если вычислить преобразование Фурье от интеграла свертки (3.9), то получим

$$F\{S^{\text{ВЫХ}}(x, y)\} = \tilde{S}^{\text{ВЫХ}}(\nu_x, \nu_y) = F\{S^{\text{ВХ}}(x, y) \otimes H(x, y)\} =$$

$$= \tilde{S}^{\text{ВХ}}(\nu_x, \nu_y)\tilde{H}(\nu_x, \nu_y), \qquad (3.11)$$

где $\tilde{S}^{\text{ВХ}}(\nu_x, \nu_y) = F\{S^{\text{ВХ}}(x, y)\}$ — пространственно-частотный спектр входного сигнала; $\tilde{S}^{\text{ВЫХ}}(\nu_x, \nu_y) = F\{S^{\text{ВЫХ}}(x, y)\}$ — пространственно-частотный спектр выходного сигнала; $\tilde{H}(\nu_x, \nu_y) = F\{H(x, y)\}$ — передаточная функция (ПФ) линейной системы.

Выражение (3.11) лежит в основе частотных методов расчета линейных инвариантных систем. Особенность этого метода заключается в том, что математические операции проводятся не с самим входным сигналом, а с его частотным спектром. При умножении частотного спектра входного сигнала $\tilde{S}^{\text{ВХ}}(\nu_x, \nu_y)$ на ПФ линейной системы $\tilde{H}(\nu_x, \nu_y)$ учитывается воздействие этой системы на каждую спектральную составляющую. Эти воздействия приводят к изменению амплитуды и фазы каждой комплексной амплитуды входного сигнала. Обратное преобразование Фурье трансформированного частотного спектра восстанавливает выходной сигнал, т. е.

$$S^{\text{вых}}(x, y) = F^{-1}\left\{\tilde{S}^{\text{вых}}\left(\nu_x, \nu_y\right)\right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{S}^{\text{вх}}\left(\nu_x, \nu_y\right)\tilde{H}\left(\nu_x, \nu_y\right)\exp\left[i \cdot 2\pi\left(\nu_x x + \nu_y y\right)\right]d\nu_x d\nu_y. \quad (3.12)$$

Поскольку ПФ линейной инвариантной системы в общем случае является комплексной функцией, ее можно представить в следующем виде:

$$\tilde{H}\left(\nu_x, \nu_y\right) = \left|\tilde{H}\left(\nu_x, \nu_y\right)\right|\exp\left[i\varphi\left(\nu_x, \nu_y\right)\right], \quad (3.13)$$

где $\left|\tilde{H}\left(\nu_x, \nu_y\right)\right|$ — модуляционная ПФ (МПФ); $\varphi\left(\nu_x, \nu_y\right)$ — функция передачи фазы (ФПФ).

Для линейной инвариантной во времени линейной системы формулы для расчета выходного сигнала имеют следующий вид:

$$S^{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} S^{\text{вх}}(\tau)H(t-\tau)d\tau; \quad (3.14)$$

$$\tilde{S}^{\text{вых}}\left(\nu_t\right) = \tilde{S}^{\text{вх}}\left(\nu_t\right)\tilde{H}\left(\nu_t\right); \quad (3.15)$$

$$\tilde{S}^{\text{вх}}\left(\nu_t\right) = \int_{-\infty}^{\infty} S^{\text{вх}}(t)\exp\left(-i \cdot 2\pi\nu_t t\right)dt; \quad (3.16)$$

$$\tilde{H}\left(\nu_t\right) = \int_{-\infty}^{\infty} H(t)\exp\left(-i \cdot 2\pi\nu_t t\right)dt; \quad (3.17)$$

$$S^{\text{вых}}(t) = F^{-1}\left\{\tilde{S}^{\text{вых}}\left(\nu_t\right)\right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{S}^{\text{вых}}\left(\nu_t\right)H\left(\nu_t\right)\exp\left(i \cdot 2\pi\nu_t t\right)d\nu_t. \quad (3.18)$$

Замечание: для временны́х инвариантных систем должно соблюдаться условие $S^{\text{вых}}(t) = 0$ при $t < 0$.

Таким образом, можно использовать две методики расчета сигнала на выходе линейных инвариантных систем, которые заключаются в следующем.

1. *Метод интеграла свертки.* Определяют импульсный отклик системы на входное воздействие в виде δ-функции и с помощью свертки входного сигнала с импульсным откликом находят выходной сигнал.

2. *Частотный метод.* Определяют ПФ системы и находят частотный спектр (ЧС) входного сигнала. Частотный спектр выходного сигнала определяют путем умножения частотного спектра входного сигнала на ПФ системы. Для определения выходного сигнала необходимо вычислить обратное преобразование Фурье от ЧС выходного сигнала.

3.2. Преобразование случайных сигналов линейными инвариантными системами

Рассмотрим преобразование однородного случайного поля, описываемого случайной функцией $g(x, y$ линейной инвариантной системы. Входной сигнал, описываемый функцией $g(x, y\ )$ представим в виде

$$g(x, y\ ) = \dot{g}\ (x\ y\ ) + m_g\ , \qquad (3.19)$$

где $\dot{g}(x, y\ )$— центрированная случайная функция; m_g — математическое ожидание входного случайного сигнала.

Входной сигнал задан следующими статистическими параметрами и характеристиками:

- математическим ожиданием m_g;
- дисперсией $D_g = \sigma_g^2$;
- корреляционной функцией $Kr_g(\xi, \eta)$;
- спектральной плотностью $\tilde{K}r_g(\nu_x, \nu_y)$.

Для вычисления статистических характеристик на выходе линейных инвариантных систем используют два метода: корреляционный и частотный.

3.2.1. Корреляционный метод расчета

Случайный сигнал $h(x, y$ на выходе линейной инвариантной системы выражается интегралом свертки:

$$h(x, y\ ) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g\ u(\ y\ H\ x\ (\ u\ -,\ v\ du)dv \quad g\ x\ (y,\ )H\otimes x\ (y,\ \ \ )(3.20)$$

где $H(x, y\ )$ — импульсный отклик линейной инвариантной системы.

Для удобства последующих математических выкладок представим выражение (3.20) в другой форме. Произведем замену переменных $x\ \ u-\ \ =$ и $y - v = q$, а также $du = -dp$ и $du = -dp$ и получим случайный сигнал на выходе линейной инвариантной системы в виде

$$h(x, y\ ) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g\ x(- p\ \ y - q\ H\ (p\ q\ dpdq = g\ x(\ y\ \otimes H\ x(\ y\ =)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\dot{g}(x - p, y - q) + m_g\right] H(p, q)dpdq =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{g}(x - p, y - q)H(\ p\ q\ dpdq + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} m_g H(\ p\ q\ dpdq =$$

$$= \dot{h}(x, y) + m_h, \qquad (3.21)$$

где

$$\dot{h}(x, y\ ) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{g}\ x(\ -p\ \ y\ \ -q\ H\ (p\ q\ dpdq \qquad (3.22)$$

— центрированная функция, описывающая случайный выходной сигнал; $m_h = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} m_g H(p, q)dpdq$ — математическое ожидание выходного случайного сигнала.

Определим корреляционную функцию случайного сигнала на выходе линейной инвариантной системы. В соответствии с определением запишем

$$Kr_h(\xi, \eta) = M\left\{\left[h(x, y) - m_h\right]\left[h(x+\xi, y+\eta) - m_h\right]\right\} =$$

$$= M\left[\dot{h}(x, y\ \dot{h}(x+\xi\ \ y+\eta)\right]. \qquad (3.23)$$

Если подставить выражение (3.22) в (3.23) и, используя свойство линейности операций интегрирования математического ожидания, внести оператор математического ожидания под знак интеграла, то получим следующее выражение для вычисления корреляционной функции однородного случайного поля на выходе линейной инвариантной системы:

$$Kr_h(\xi, \eta) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} M\left[\dot{g}(x-p_1, y-q_1)\dot{g}(x+\xi-p_2, y+\eta-q_2)\right]\times$$

$$\times H(p_1, q_1)\, H(p_2, q_2)\, dp_1 dq_1 dp_2 dq_2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} Kr_g(\xi + p_1 - p_2, \eta + q_1 - q_2)\times$$

$$\times H(p_1, q_1)\, H(p_2, q_2)\, dp_1 dq_1 dp_2 dq_2. \qquad (3.24)$$

Выведем выражение для расчета дисперсии однородного случайного поля на выходе линейной инвариантной системы. Поскольку $D_h = Kr_h(\ 0\ 0)$, то

$$D_h = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} Kr_g(p_1 - p_2, q_1 - q_2)\, H(p_1, q_1)\times$$

$$\times H(p_2, q_2)\, dp_1 dq_1 dp_2 dq_2. \qquad (3.25)$$

Следовательно, если на вход линейной инвариантной системы поступает сигнал от однородного случайного поля, то выходной сигнал также является однородным случайным полем.

3.2.2. Спектральный метод расчета

В этом методе описание входного и выходного случайного поля (процесса) задается спектральными плотностями. Используя формулы Хинчина — Винера, вычислим спектральную плот-

ность выходного случайного поля, корреляционная функция которого описывается выражением (3.24):

$$\tilde{K}r_h(\nu_x, \nu_y) = F\{Kr_h(\xi, \eta)\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} Kr_g(\xi + p_1 - p_2, \eta + q_1 - q_2)\times$$

$$\times H(p_1, q_1)H(p_2, q_2)\exp\left[-i\cdot 2\pi(\nu_x\xi + \nu_y\eta)\right]dp_1dq_1dp_2dq_2d\xi d\eta =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H(p_1, q_1)dp_1dq_1 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H(p_2, q_2)dp_2dq_2 \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} Kr_g(\xi + p_1 - p_2, \eta + q_1 - q_2)\exp\left[-i\cdot 2\pi(\nu_x\xi + \nu_y\eta)\right]d\xi d\eta. \quad (3.26)$$

Сделаем замену переменных в третьем интеграле выражения (3.26): $\alpha = \xi + p_1 - p_2$, $\gamma = \eta + q_1 - q_2$. При этом $d\alpha = d\xi$, $d\gamma = d\eta$, $\xi = \alpha + p_2 - p_1$, $\eta = \gamma + q_2 - q_1$.

Тогда выражение (3.26) можно представить в виде

$$\tilde{K}r_h(\nu_x, \nu_y) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H(p_1, q_1)\exp\left[-i\cdot 2\pi\left((-\nu_x)p_1 + (-\nu_y)q_1\right)\right]dp_1dq_1 \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H(p_2, q_2)\exp\left[-i\cdot 2\pi(\nu_x p_2 + \nu_y q_2)\right]dp_2dq_2 \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} Kr_g(\alpha, \gamma)\exp\left[-i\cdot 2\pi(\nu_x\alpha + \nu_y\gamma)\right]d\alpha d\gamma =$$

$$= \tilde{K}r_g(\nu_x, \nu_y)\tilde{H}(-\nu_x, -\nu_y)\tilde{H}(\nu_x, \nu_y). \quad (3.27)$$

Если $H(x, y$ — действительная функция, т. е. $H(x, y) = H^*(x, y)$, то $\tilde{H}(-\nu_x, -\nu_y) = \tilde{H}^*(\nu_x, \nu_y)$ — свойство эрмитовости. Тогда

$$\tilde{K}r_h(\nu_x, \nu_y) = \tilde{K}r_g(\nu_x, \nu_y)\left|\tilde{H}(\nu_x, \nu_y)\right|^2. \quad (3.28)$$

Выведем формулу для расчета дисперсии случайного однородного поля на выходе линейной системы. В соответствии с формулами Хинчина — Винера

$$Kr_h(\xi, \eta) = F^{-1}\left\{\tilde{K}r_h(\nu_x, \nu_y)\right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{K}r_g(\nu_x, \nu_y)\left|\tilde{H}(\nu_x, \nu_y)\right|^2 \exp\left[i \cdot 2\pi(\nu_x\xi + \nu_y\eta)\right] d\nu_x d\nu_y.$$

Поскольку $D_\eta = Kr_\eta(0, 0)$, то приравняв в подынтегральном выражении $\xi = 0$ и $\eta = 0$, получим следующую формулу:

$$D_\eta = Kr_\eta(0, 0) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{K}r_\xi(\nu_x, \nu_y)\left|\tilde{H}(\nu_x, \nu_y)\right|^2 d\nu_x d\nu_y. \quad (3.29)$$

Если на входе линейной системы действует случайный стационарный процесс, реализации которого описываются случайными функциями $g(t)$, то по аналогии с выведенными соотношениями можно записать следующие формулы для расчета математического ожидания, корреляционной функции, спектральной плотности и дисперсии выходного случайного процесса на выходе линейной системы:

$$m_h = m_g \int_{-\infty}^{\infty} H(t)dt; \quad (3.30)$$

$$Kr_h(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} Kr_g(\tau + p_1 - p_2)H(p_1)H(p_2)dp_1dp_2; \quad (3.31)$$

$$D_h = Kr_h(0) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} Kr_g(p_1 - p_2)H(p_1)H(p_2)dp_1dp_2; \quad (3.32)$$

$$\tilde{K}r_h(\nu_t) = \tilde{K}r_g(\nu_t)\left|\tilde{H}(\nu_t)\right|^2; \quad (3.33)$$

$$D_h = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{K}r_g(\nu_t)\left|\tilde{H}(\nu_t)\right|^2 d\nu_t. \quad (3.34)$$

Ч. II. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ОПТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ ЭЛЕМЕНТАМИ ОБОБЩЕННОЙ СХЕМЫ ОПТИКО-ЭЛЕКТРОННОГО ПРИБОРА

4. ОПТИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ КАК НОСИТЕЛИ СИГНАЛОВ

С позиций теории связи ОЭП осуществляют преобразование сигналов, причем входным является оптический сигнал. Напомним, что термин «сигнал» используется для обозначения физического процесса, параметры которого изменяются в соответствии с сообщением. Для ОЭП материальным носителем сообщений являются электромагнитные волны оптического диапазона излучения. В зависимости от свойств оптических волн в физической оптике используют понятия «когерентное», «частично-когерентное» и «некогерентное» излучения. Начнем рассмотрение оптических сигналов для случая, когда носителем сообщения является когерентное излучение.

Понятие «когерентное излучение» применимо для идеальных монохроматических волн, не имеющих ограничений в пространстве и во времени. Это означает, что такие волны существовали и будут существовать всегда в неограниченном пространстве. Естественно, что это является идеализацией реального физического процесса. Оптического излучения, обладающего абсолютной когерентностью, в природе не существует. Однако допущение о когерентности оптических сигналов с практической точки зрения вполне оправданно, поскольку позволяет существенно упростить математическое описание физических процессов распространения и преобразования оптического излучения при достаточной степени точности получаемых результатов. Когерентным оптическим сигналом будем называть монохроматическую волну, в параметрах которой, например в амплитуде или фазе, со-

держится информационное сообщение. Рассмотрим математическое описание когерентных оптических сигналов, которые с позиций волновой теории представляют собой оптические волны.

4.1. Волновое уравнение

Пусть световое возмущение в точке P пространства в момент времени t описывается скалярной функцией $u(P,t)$. Для линейно-поляризованных волн можно считать, что эта функция описывает напряженность электрического или магнитного поля. Рассмотрим случай монохроматических волн. Если действительная функция $u(P,t)$ описывает оптическую волну, то в каждой точке P, где нет источников излучения, она должна удовлетворять скалярному волновому уравнению

$$\Delta u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \tag{4.1}$$

где $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа.

Решение волнового уравнения имеет вид

$$u(P,t) = a(P)\cos\left[2\pi\nu_t t - \varphi(P)\right], \tag{4.2}$$

где P — точка пространства с координатами x, y, z; $a(P)$, $\varphi(P)$ — соответственно действительная амплитуда и фаза волны в точке P; ν_t — оптическая (временная) частота; c — скорость света. Используя известную связь между гармоническими функциями действительного и комплексного переменного, выражение (4.2) можно представить в следующем виде:

$$u(P,t) = \mathrm{Re}\left[U(P,t)\right] = \mathrm{Re}\left[A(P)\exp\left(-i\cdot 2\pi\nu_t t\right)\right], \tag{4.3}$$

где $A(P) = a(P)\exp\left[i\varphi(P)\right]$ — комплексная амплитуда оптической волны; $\mathrm{Re}[\ ]$ — обозначение действительной части функции комплексной переменной, например $\mathrm{Re}\left[\exp(ix)\right] = \cos(x)$.

Задание комплексной амплитуды волны $A(P)$ достаточно для описания возмущения, так как зависимость $A(P)$ от времени из-

вестна заранее. В дальнейшем, если операции, проводимые над $U(P,t)$, линейны, то для удобства математических выкладок оператор Re[ ] опускается, а функция $u(P,t)$ заменяется комплексной функцией

$$U(P,t) = A(P)\exp\left(-i\cdot 2\pi\nu_t t\right). \tag{4.4}$$

Вещественная часть выражения (4.4) описывает поле монохроматической волны.

Подставив выражение (4.4) в (4.1), получим

$$\Delta A(P)\exp\left(-i\cdot 2\pi\nu_t t\right) - \frac{1}{c^2}A(P)\left(-i\cdot 2\pi\nu_t\right)\left(-i\cdot 2\pi\nu_t\right)\times$$
$$\times\exp\left(-i\cdot 2\pi\nu_t t\right) = 0. \tag{4.5}$$

После подстановки $\nu_t = c/\lambda$ и волнового числа $k = 2\pi/\lambda$ в выражение (4.5), получим уравнение Гельмгольца:

$$\Delta A(P) + k^2 A(P) = 0. \tag{4.6}$$

Таким образом, если оптическое возмущение задано в виде (4.4), то комплексная амплитуда $A(P)$ должна удовлетворять уравнению (4.6), заданному для функций пространственных координат.

4.2. Плоские гармонические волны

4.2.1. Уравнение плоской волны

Гармоническая волна называется плоской, если ее амплитуда и фаза в любой момент времени постоянны на плоскости, удовлетворяющей уравнению

$$\vec{r}\vec{n} = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = \text{const}, \tag{4.7}$$

где $\vec{r} = (x, y, z)$ — радиус-вектор точки P; $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ — единичный вектор нормали к плоскости, который задает направление распространения волны (рис. 4.1).

Оптическое возмущение в виде распространяющейся в пространстве плоской волны, представим комплексной функцией

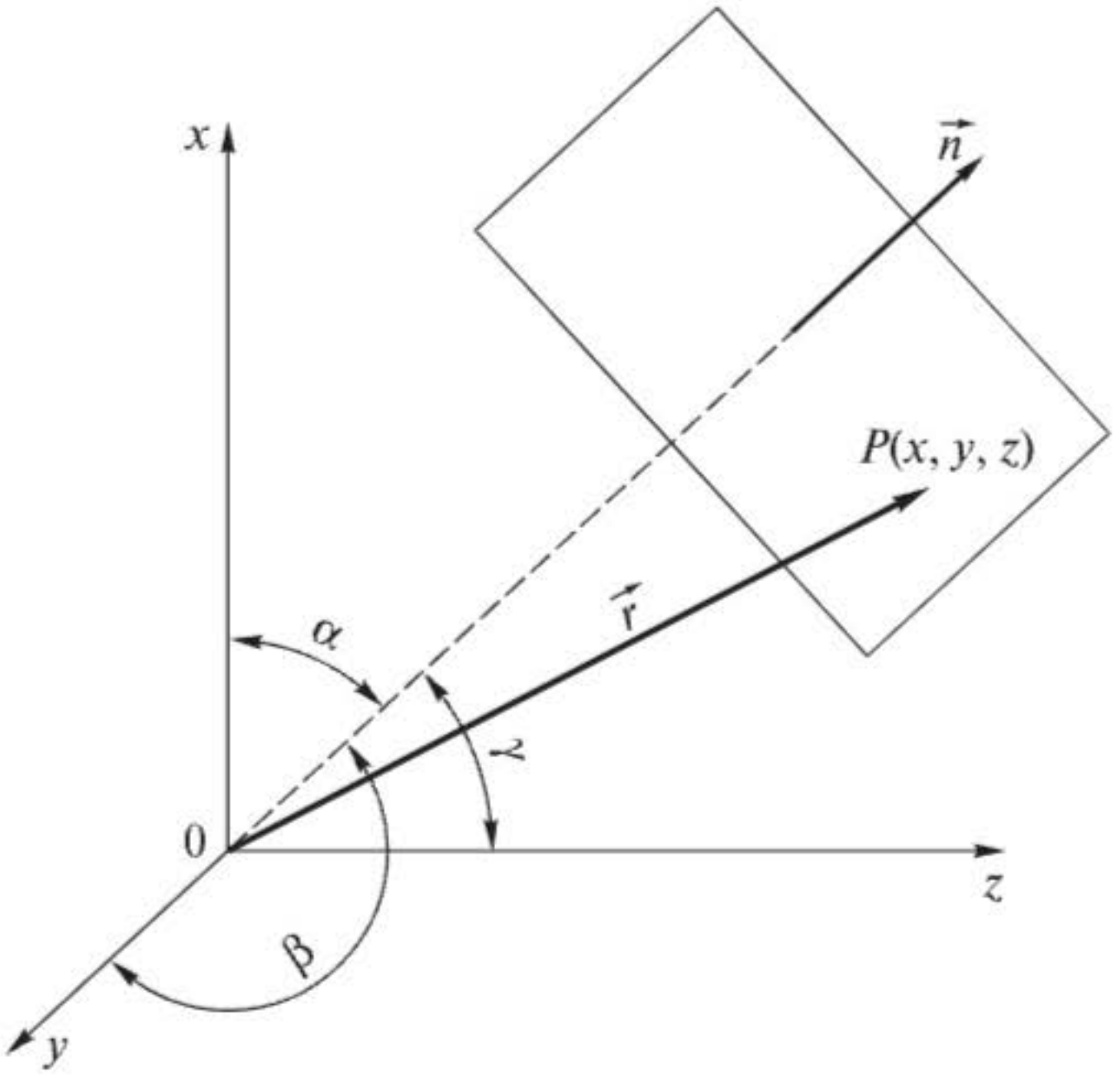


Рис. 4.1. К описанию плоской волны

$$U(P,t) = a\exp(ik\vec{r}\vec{n})\exp\left(-i\cdot 2\pi\nu_t t\right), \tag{4.8}$$

где $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число; a — постоянная действительная амплитуда волны.

С учетом зависимости (4.7) уравнение плоской волны (4.8) принимает вид

$$U(x,y,z) = a\exp\left[ik\left(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma\right)\right]\exp\left(-i\cdot 2\pi\nu_t t\right) =$$

$$= a\exp\left[i\cdot 2\pi\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda}x + \frac{\cos\beta}{\lambda}y + z\frac{\cos\gamma}{\lambda}\right)\right]\exp\left(-i\cdot 2\pi\nu_t t\right) =$$

$$= a\exp\left[i\cdot 2\pi\left(x\nu_x + y\nu_y + z\nu_z\right)\right]\exp\left(-i\cdot 2\pi\nu_t t\right), \tag{4.9}$$

где $\nu_x = \cos\alpha/\lambda$, $\nu_y = \cos\beta/\lambda$, $\nu_z = \cos\gamma/\lambda$ — пространственные частоты.

Поскольку $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \left(\lambda\nu_x\right)^2 + \left(\lambda\nu_y\right)^2 + \left(\lambda\nu_z\right)^2 = 1$, то

$$\nu_z = \pm\frac{1}{\lambda}\sqrt{1-(\lambda\nu_x)^2-(\lambda\nu_y)^2}. \qquad (4.10)$$

Знак в выражении (4.10) определяется направлением распространения волны.

Докажем, что комплексная амплитуда плоской волны

$$A(x, y, z) = a\exp\left[i\cdot 2\pi\left(\nu_x x+\nu_y y+\nu_z z\right)\right] \qquad (4.11)$$

удовлетворяет уравнению Гельмгольца (4.6).

Применив оператор Лапласа к выражению (4.11)

$$\Delta A(x, y, z) = a\left\{\left[i\frac{2\pi}{\lambda}\cos\alpha\right]^2+\left[i\frac{2\pi}{\lambda}\cos\beta\right]^2+\left[i\frac{2\pi}{\lambda}\cos\gamma\right]^2\right\}\times$$

$$\times\exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\right] = -a\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2\times$$

$$\times\left[\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma\right]\exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}\vec{r}\vec{n}\right) = -ak^2\exp\left(ik\vec{r}\vec{n}\right), \qquad (4.12)$$

и подставив в уравнение (4.6) выражения (4.11) и (4.12), получим

$$\Delta A(x, y, z)+k^2A(x, y, z) = -ak^2\exp\left(ik\vec{r}\vec{n}\right)+ak^2\exp\left(ik\vec{r}\vec{n}\right) = 0.$$

Докажем, что уравнение плоской волны $U(P,t)$, определяемое выражением (4.8), удовлетворяет волновому уравнению (4.1).

Находим $\Delta U(P,t)$:

$$\Delta U(P,t) = \Delta A(P)\exp\left(-i\cdot 2\pi\nu_t t\right) = -ak^2\exp\left(ik\vec{r}\vec{n}\right)\exp\left(-i\cdot 2\pi\nu_t t\right). \qquad (4.13)$$

Вычислим $\frac{1}{c}\frac{\partial^2U(P,t)}{\partial t^2}$:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial^2U(P,t)}{\partial t^2} = \frac{1}{c}a\exp\left(ik\vec{r}\vec{n}\right)\left(-i\cdot 2\pi\nu_t\right)\left(-i\cdot 2\pi\nu_t\right)\exp\left(-i\cdot 2\pi\nu_t t\right) =$$

$$= -ak^2\exp\left(ik\vec{r}\vec{n}\right)\exp\left(-i\cdot 2\pi\nu_t\right). \qquad (4.14)$$

Подставив полученные зависимости (4.13) и (4.14) в волновое уравнение (4.1), получим

$$-ak^2\exp(ik\vec{r}\vec{n})\exp(-i\cdot 2\pi\nu_t t)+ak^2\exp(ik\vec{r}\vec{n})\exp(-i\cdot 2\pi\nu_t t)=0.$$

Преобразуем уравнение плоской волны (4.8) к другому виду:

$$U(P,t)=a\exp(ik\vec{r}\vec{n})\exp(-i\cdot 2\pi\nu_t t)=$$

$$a\exp\left(i\cdot 2\pi\frac{\vec{r}\vec{n}}{c}\nu_t\right)\exp(-i\cdot 2\pi\nu_t t)=a\exp\left[-i\cdot 2\pi\nu_t\left(t-\frac{\vec{r}\vec{n}}{c}\right)\right]. \quad (4.15)$$

Выражение (4.15) описывает плоскую волну, распространяющуюся в направлении вектора $\vec{n}$ нормали со скоростью c. Если плоская волна движется в обратном направлении, то

$$U(P,t)=a\exp\left[-i\cdot 2\pi\nu_t\left(t+\frac{\vec{r}\vec{n}}{c}\right)\right]=$$

$$=a\exp\left(-i\cdot 2\pi\nu_t t-i\cdot 2\pi\frac{\vec{r}\vec{n}}{\lambda}\right)=a\exp(-ik\vec{r}\vec{n})\exp(-i\cdot 2\pi\nu_t t). \quad (4.16)$$

Таким образом, для комплексной амплитуды плоской волны, распространяющейся в ***направлении вектора*** $\vec{n}$, с учетом формулы (4.10) получим следующее выражение:

$$A(x,y,z)=a\exp\left[i\cdot 2\pi\left(\nu_x x+\nu_y y+\frac{z}{\lambda}\sqrt{1-(\lambda\nu_x)^2-(\lambda\nu_y)^2}\right)\right]. \quad (4.17)$$

Для комплексной амплитуды волны, распространяющейся ***в обратном направлении***, получим

$$A^*(x,y,z)=a\exp\left[-i\cdot 2\pi\left(\nu_x x+\nu_y y+\frac{z}{\lambda}\sqrt{1-(\lambda\nu_x)^2-(\lambda\nu_y)^2}\right)\right]. \quad (4.18)$$

В ряде случаев пространственные частоты ν_x, ν_y и ν_z удобно выражать через дополнительные углы к углам α, β и γ. Обозначив $\theta_x=\pi/2-\alpha$, $\theta_y=\pi/2-\beta$ и $\theta_z=\pi/2-\gamma$, получим

$$\nu_x=\frac{\sin\theta_x}{\lambda};\quad \nu_y=\frac{\sin\theta_y}{\lambda};\quad \nu_z=\frac{\sin\theta_z}{\lambda}. \quad (4.19)$$

Отметим, что пространственные частоты могут принимать как положительные, так и отрицательные значения. Если вектор $\vec{n}$

составляет с соответствующей осью угол меньше, чем $\pi/2$, то пространственная частота — положительная, если больше $\pi/2$, то пространственная частота — отрицательная.

4.2.2. Частные случаи распространения плоской волны

Рассмотрим плоскую волну в случае, когда вектор нормали, определяющий направление распространения волнового фронта, лежит в плоскости $x0z$ (рис. 4.2, *а*).

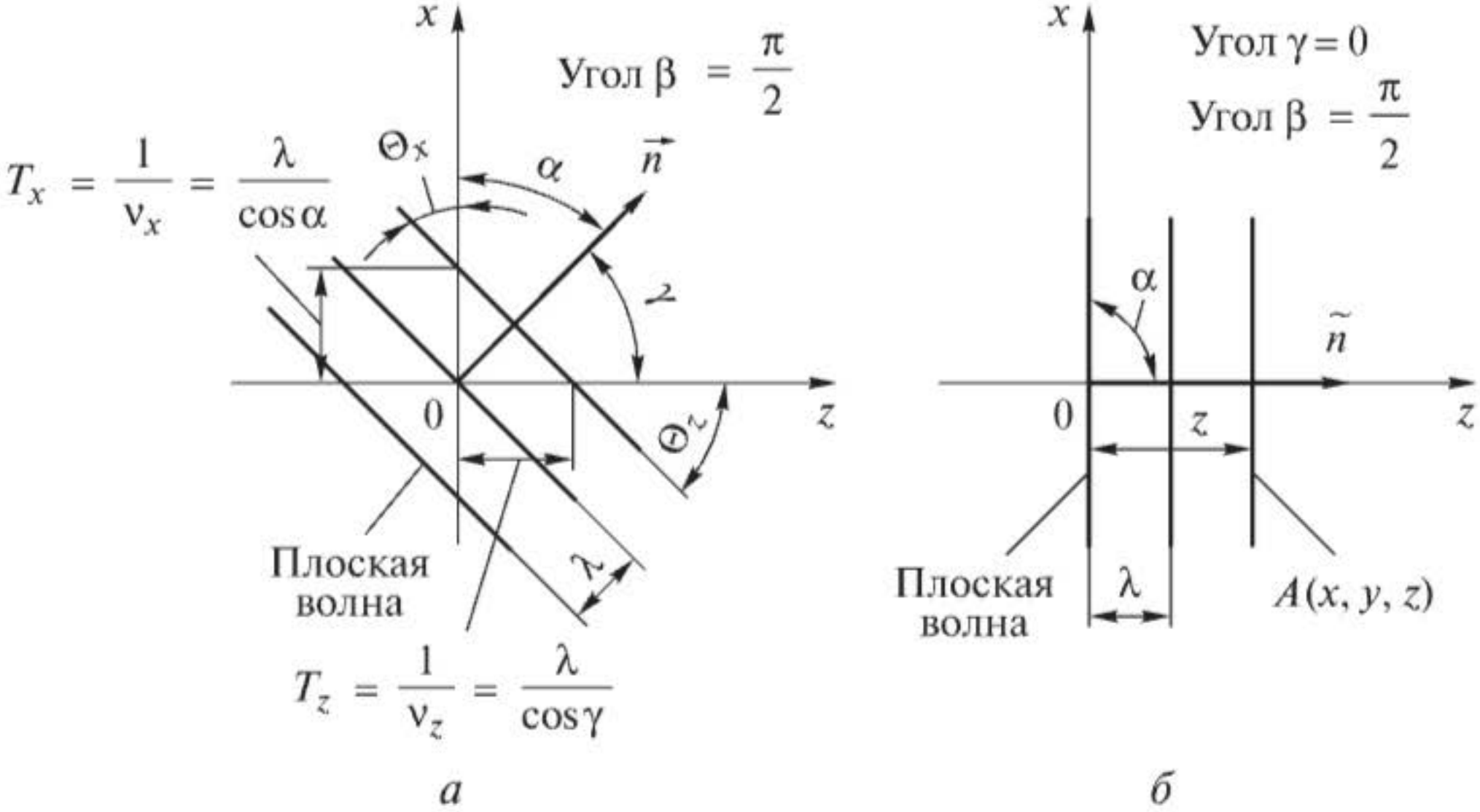


Рис. 4.2. Частные случаи распространения плоских волн в пространстве

При этом угол $\beta = \pi/2$ и $\nu_y = \cos\beta/\lambda = 0$. Если $\gamma = \pi/2 - \alpha \neq 0$ (см. рис. 4.2, *а*), то уравнение комплексной амплитуды волны имеет вид

$$A(x, y, z) = a\exp\left[i \cdot 2\pi\left(\nu_x x + \frac{z}{\lambda}\sqrt{1-(\lambda\nu_x)^2}\right)\right]. \qquad (4.20)$$

Если углы $\alpha = \beta = \pi/2$, а угол $\gamma = 0$, то $\nu_x = \nu_y = 0$, а $\nu_z = 1/\lambda$. Тогда уравнение комплексной амплитуды волны, распространяющейся вдоль оси z (рис. 4.2, *б*), имеет вид

$$A(x, y, z) = a\exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}z\right). \qquad (4.21)$$

4.2.3. Фурье-образ плоской волны

Рассмотрим фурье-образ плоской волны для трех случаев:

1) плоская волна распространяется в пространстве в произвольном направлении, которое определяется фиксированными значениями углов α_0, β_0 и γ_0;

2) нормаль к волновому фронту плоской волны лежит в плоскости $x0z$ ($\beta_0 = \pi/2$), причем $\alpha_0 = \pi/2 - \gamma_0 \neq 0$;

3) плоская волна распространяется в направлении оси z ($\alpha_0 = \beta_0 = \pi/2$).

1. Плоская волна распространяется в пространстве в произвольном направлении:

$$A(x, y, z) = a\exp\left[i \cdot 2\pi\left(\nu_{x0}x + \nu_{y0}y + \nu_{z0}z\right)\right], \qquad (4.22)$$

где $\nu_{x0} = \dfrac{\cos\alpha_0}{\lambda}$, $\nu_{y0} = \dfrac{\cos\beta_0}{\lambda}$, $\nu_{z0} = \dfrac{\cos\gamma_0}{\lambda}$ — фиксированные значения пространственных частот. Вычислим фурье-образ по переменным x и y:

$$\tilde{A}\left(\nu_x, \nu_y, z\right) = F_{xy}\left\{A(x, y, z)\right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} A(x, y, z)\exp\left[-i \cdot 2\pi\left(\nu_x x + \nu_y y\right)\right]dxdy =$$

$$= a\exp\left(i \cdot 2\pi\nu_{z0}z\right)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[i \cdot 2\pi\left(\nu_{x0}x + \nu_{y0}y\right)\right]\times$$

$$\times\exp\left[-i \cdot 2\pi\left(\nu_x x + \nu_y y\right)\right]dxdy = a\exp\left(i \cdot 2\pi\nu_{z0}z\right)\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-i \cdot 2\pi\left(\left(\nu_x - \nu_{x0}\right)x + \left(\nu_y - \nu_{y0}\right)y\right)\right]dxdy =$$

$$= a\exp\left(i \cdot 2\pi\nu_{z0}z\right)\delta\left(\nu_x - \nu_{x0}, \nu_y - \nu_{y0}\right), \qquad (4.23)$$

где

$$\delta\left(\nu_x - \nu_{x0}, \nu_y - \nu_{y0}\right) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\pm i \cdot 2\pi\left(\left(\nu_x - \nu_{x0}\right)x + \left(\nu_y - \nu_{y0}\right)y\right)\right]dxdy$$

— интегральное представление дельта-функции Дирака.

2. Нормаль к плоскому волновому фронту лежит в плоскости $x0z$ ($\beta_0 = \pi/2$), причем $\alpha_0 = \pi/2 - \gamma_0$. В этом случае комплексная амплитуда плоской волны

$$A(x, y, z) = a\exp\left[i \cdot 2\pi\left(\nu_{x0} x + \nu_{z0} z \right) \right], \tag{4.24}$$

а фурье-образ определяется выражением

$$F_{xy}\left\{ A(x, y, z) \right\} = \tilde{A}\left(\nu_x, \nu_y, z \right) =$$

$$= a\exp\left(i \cdot 2\pi\nu_{z0} z \right) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(i \cdot 2\pi\nu_{x0} x \right) \exp\left[-i \cdot 2\pi\left(\nu_x x + \nu_y y \right) \right] dxdy =$$

$$= a\exp\left(i \cdot 2\pi\nu_{z0} z \right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-i \cdot 2\pi\left(\nu_x - \nu_{x0} \right) x \right] dx \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-i \cdot 2\pi\nu_y y \right) dy = a\exp\left(i \cdot 2\pi\nu_{z0} z \right) \delta\left(\nu_x - \nu_{x0} \right) \delta\left(\nu_y \right). \tag{4.25}$$

3. Плоская волна распространяется вдоль оси z ($a_0 = \pi/2$, $\beta_0 = \pi/2, \gamma_0 = 0$). Комплексная амплитуда определяется выражением

$$A(x, y, z) = a\exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda} z \right), \tag{4.26}$$

а фурье-образ волны имеет вид

$$F_{xy}\left\{ A(x, y, z) \right\} =$$

$$= \tilde{A}\left(\nu_x, \nu_y, z \right) = a\exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda} z \right) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-i \cdot 2\pi\left(\nu_x x + \nu_y y \right) \right] dxdy =$$

$$= a\exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda} z \right) \delta\left(\nu_x, \nu_y \right). \tag{4.27}$$

4.3. Сферические гармонические волны

4.3.1. Уравнение сферической волны

Гармоническая волна называется сферической, если амплитуда и фаза волны в любой момент времени постоянны на сфере радиуса *r*. В сферической системе координат (рис. 4.3) уравнение оптического сигнала в виде сферической волны имеет вид

$$U(r,t) = A(r)\exp(-i\cdot 2\pi\nu_t t), \tag{4.28}$$

где $A(r, \phi\ \theta) = A(r)$ — комплексная амплитуда, которая зависит только от *r*.

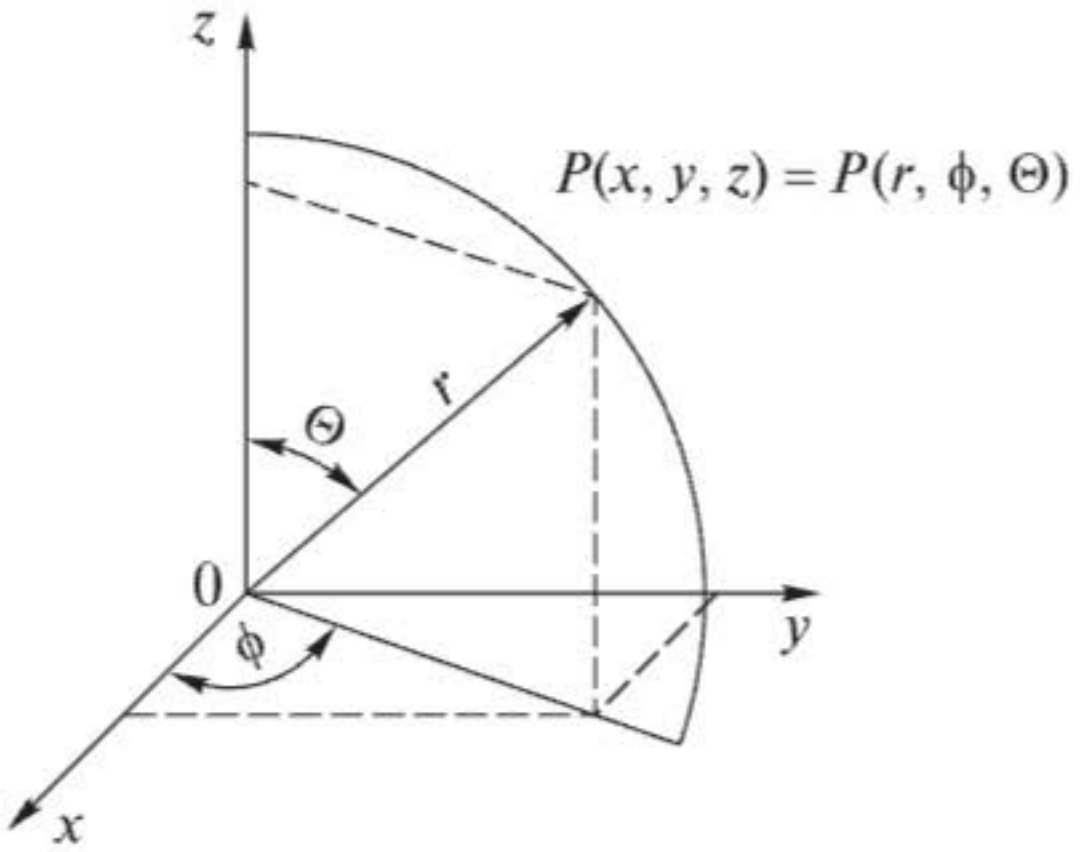


Рис. 4.3. Связь декартовой и сферической систем координат

Найдем комплексную амплитуду $A(r)$ сферической волны как решение уравнения Гельмгольца. Оператор Лапласа в сферической системе координат имеет вид

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2\partial}{r\partial r} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}. \tag{4.29}$$

Поскольку $A(r, \phi\ ,\theta) = A(r)$, то уравнение Гельмгольца в сферической системе координат имеет вид

$$\frac{\partial^2 A(r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial A(r)}{\partial r} + k^2 A(r) = 0. \tag{4.30}$$

Покажем, что $\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left[rA(r)\right] = \frac{\partial^2 A(r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial A(r)}{\partial r}$. Имеем

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left[rA(r)\right] = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[A(r) + r\frac{\partial A(r)}{\partial r}\right] =$$

$$= \frac{1}{r}\left[\frac{\partial A(r)}{\partial r} + \frac{\partial A(r)}{\partial r} + r\frac{\partial^2 A(r)}{\partial r^2}\right] = \frac{2}{r}\frac{A(r)}{\partial r} + \frac{\partial^2 A(r)}{\partial r^2}. \qquad (4.31)$$

С учетом равенства (4.31) уравнение Гельмгольца представим в виде

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left[rA(r)\right] + k^2 A(r) = \frac{\partial^2}{\partial r^2}\left[rA(r)\right] + k\left[rA(r)\right] = 0. \qquad (4.32)$$

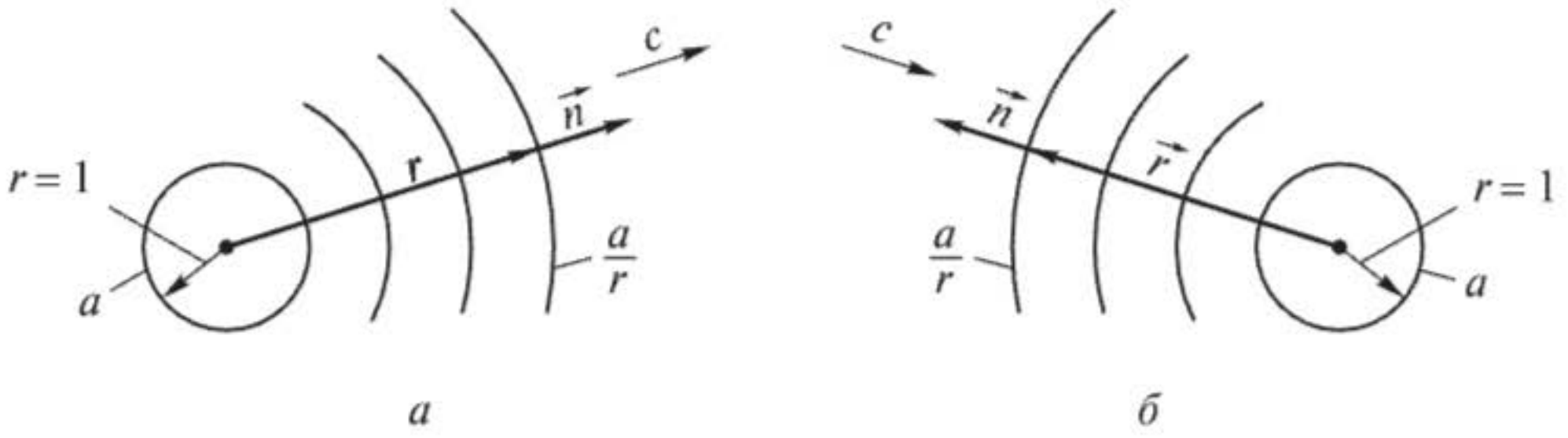
Решение уравнения (4.32) имеет вид $rA(r) = a\exp\left(ik\vec{r}\vec{n}\right)$. Поскольку $\vec{r}\vec{n} = \left|\vec{r}\right|\cos\left(\vec{r}\,\hat{}\,\vec{n}\right) = r$, то комплексную амплитуду расходящейся сферической волны можно представить как

$$A(r) = \frac{a}{r}\exp(ikr). \qquad (4.33)$$

Подставив выражение (4.33) в (4.28), получим следующее уравнение оптического сигнала в виде сферической волны:

$$U(r,t) = \frac{a}{r}\exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}r\right)\exp\left(-i\cdot 2\pi\nu_t t\right) = \frac{a}{r}\exp\left[-i\cdot 2\pi\nu_t\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]. \qquad (4.34)$$

Уравнение (4.34) описывает сферическую волну, которая расходится из центра, т. е. распространяется в направлении нормали $\vec{n}$ в каждой точке (рис. 4.4, *а*). Если волна сходится в точку (рис. 4.4, *б*), то знак изменяется на противоположный, т. е.



а *б*

Рис. 4.4. Иллюстрация расходящейся (*а*) и сходящейся (*б*) сферических волн

$$U^*(r,t) = \frac{a}{r}\exp\left[-i\cdot 2\pi\nu_t\left(t+\frac{r}{c}\right)\right] =$$

$$= \frac{a}{r}\exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda}r\right)\exp\left(-i\cdot 2\pi\nu_t t\right). \qquad (4.35)$$

Тогда комплексная амплитуда сходящейся сферической волны определяется выражением

$$A^*(r) = \frac{a}{r}\exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda}r\right). \qquad (4.36)$$

4.3.2. Сферическая волна в параксиальном приближении

Пусть в точке P с координатами x_0 и y_0, лежащей в плоскости $z = 0$, расположен точечный источник монохроматического излучения (рис. 4.5). Тогда уравнение для комплексной амплитуды в точке Q с координатами x, y, z определяется формулой

$$A(x, y, z) = \frac{a\exp(ikr)}{r} = \frac{a\exp\left[ik\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z^2}\right]}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z^2}}. \qquad (4.37)$$

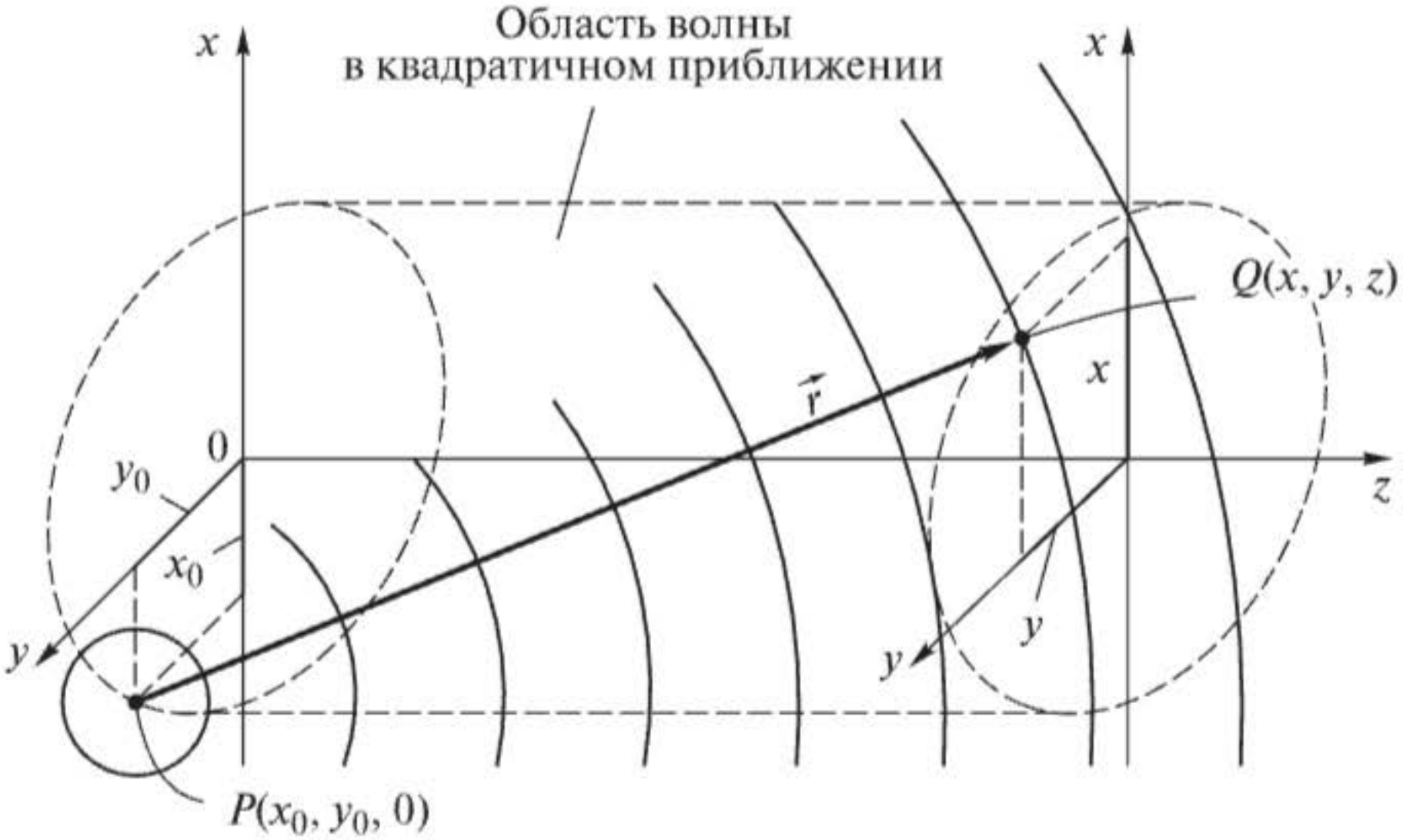


Рис. 4.5. Расходящаяся сферическая волна в параксиальном приближении

Сделав допущение, что $z >> (x - x_0)$ и $z >> (y - y_0)$, знаменатель выражения (4.38) можно принять равным

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2} \approx z.$$

Для показателя степени экспоненты в выражении (4.37) необходимо использовать более точное приближение, так как в противном случае сферическая волновая поверхность упростится до плоской.

Разложим квадратный корень в показателе степени экспоненты выражения (4.37) в бином Ньютона:

$$\sqrt{1 \pm b} = 1 \pm \frac{1}{2}b \mp \frac{1}{8}b^2 \pm \ldots, \quad |b| < 1$$

и ограничимся двумя членами разложения. Тогда получим

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0) + z^2} = z\sqrt{1 + \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{z^2}} \approx$$

$$\approx z\left[1 + \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{2z^2}\right] = z + \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{2z}. \quad (4.38)$$

Будем считать, что можно пренебречь третьим членом в разложении по биному Ньютона при выполнении критерия Рэлея, а именно

$$\frac{z}{8}\left[\frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{z^2}\right]^2_{\max} \le \frac{\lambda}{10}. \quad (4.39)$$

С учетом принятых допущений выражение (4.37) преобразуется к виду

$$A(x, y, z) = \frac{a}{z}\exp(ikz)\exp\left[i\frac{k}{2z}\left((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2\right)\right]. \quad (4.40)$$

Выражение (4.40) описывает комплексную амплитуду расходящейся сферической волны в квадратичном приближении, где a/z — действительная амплитуда волны; $\exp(ikz)$ — постоянный фазовый набег волны, который не зависит от координат x и y.

Уравнение для сходящейся сферической волны имеет вид

$$A^*(x, y, z) = \frac{a}{z}\exp(-ikz)\exp\left[-i\frac{k}{2z}\left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right)\right]. \quad (4.41)$$

В большинстве случаев постоянный фазовый набег не играет существенной роли при анализе, поэтому множитель $\exp(ikz)$ обычно не учитывают.

Найдем фурье-образы расходящейся и сходящейся сферических волн в квадратичном приближении.

Фурье-образ расходящейся волны определяется выражением

$$\tilde{A}(\nu_x, \nu_y, z) = F_{xy}\{A(x, y, z)\} =$$

$$= \frac{a}{z}F_{xy}\left\{\exp\left[i\frac{\pi}{\lambda z}\left(x^2+y^2\right)\right]\right\} = \frac{a}{z}F_{xy}\left\{\exp\left[-\pi\left(\left(\frac{x}{\sqrt{i\lambda z}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{i\lambda z}}\right)^2\right)\right]\right\}.$$

Поскольку

$$F_{xy}\left\{\exp\left[-\pi\left(x^2+y^2\right)\right]\right\} = \exp\left[-\pi\left(\nu_x^2+\nu_y^2\right)\right],$$

$$F_{xy}\{S(x/a, \quad y/b\} = \quad ab\tilde{S}(a\nu_x, \quad b\nu_y),$$

то фурье-образ расходящейся волны описывается выражением

$$\tilde{A}(\nu_x, \nu_y, z) = \frac{a}{z}i\lambda z\exp\left[-\pi\left(\left(\sqrt{i\lambda z}\nu_x\right)^2+\left(\sqrt{i\lambda z}\nu_y\right)^2\right)\right] =$$

$$= i\lambda a\exp\left[-i\pi\lambda z\left(\nu_x^2+\nu_y^2\right)\right]. \quad (4.42)$$

Соответственно фурье-образ сходящейся волны имеет вид

$$F_{xy}\left\{A^*(x, y, z)\right\} = F_{xy}\left\{\frac{a}{z}\exp\left[-i\frac{\pi}{\lambda z}\left(x^2+y^2\right)\right]\right\} =$$

$$= -ia\lambda\exp\left[i\pi\lambda z\left(\nu_x^2+\nu_y^2\right)\right]. \quad (4.43)$$

5. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КОГЕРЕНТНЫХ СИГНАЛОВ СЛОЕМ ПРОСТРАНСТВА

В физической оптике для описания процессов распространения излучения в пространстве используют классический подход, основанный на скалярной теории дифракции. Однако процессы распространения излучения можно описывать и в рамках теории линейных систем, которая используется для математического моделирования преобразования сигналов в ОЭП. Как будет показано ниже, такой подход, в отличие от классического, позволяет упростить математическое описание за счет использования математического аппарата фурье-анализа.

5.1. Угловой спектр волны как суперпозиция плоских волн

5.1.1. Понятие углового спектра

Предположим, что волна, созданная произвольной системой монохроматических источников излучения и распространяющаяся в положительном направлении оси z, достигает плоскости $z = 0$. Пусть комплексная амплитуда волны в этой плоскости равна $A(x, y, 0)$. Ее фурье-образ описывается выражением

$$\tilde{A}(\nu_x, \nu_y, 0) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} A(x, y, 0)\exp\left[-i \cdot 2\pi(\nu_x x + \nu_y y)\right]dxdy. \quad (5.1)$$

Как отмечалось в ч. I, операцию обратного преобразования Фурье (интеграл Фурье) можно рассматривать как представление сложной функции в виде совокупности более простых комплексных экспоненциальных функций. Для того чтобы подчеркнуть это обстоятельство, запишем $A(x, y, 0)$ в виде обратного преобразования Фурье:

$$A(x, y, 0) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}(\nu_x, \nu_y, 0)\exp\left[i \cdot 2\pi(\nu_x x + \nu_y y)\right]d\nu_x d\nu_y. \quad (5.2)$$

В плоскости $z = 0$ комплексную экспоненциальную функцию $\exp\left[i \cdot 2\pi(\nu_x x + \nu_y y)\right]$ можно рассматривать как плоскую волну, положение которой в пространстве определяется направляющими косинусами:

$$\cos\alpha = \lambda\nu_x,\ \cos\beta = \lambda\nu_y,\ \cos\gamma = \sqrt{1-(\lambda\nu_x)^2-(\lambda\nu_y)^2}.$$

Действительная амплитуда и начальная фаза этой плоской волны определяются модулем и аргументом комплексной амплитуды $dC = \tilde{A}(\nu_x, \nu_y)d\nu_x d\nu_y$. В соответствии с такой интерпретацией фурье-образ $\tilde{A}(\nu_x, \nu_y)$ называют ***угловым спектром волны*** в плоскости $z = 0$. Таким образом, если задана комплексная амплитуда волны $A(x, y, 0)$, то ее можно представить в виде интеграла Фурье, т. е. в виде бесконечной суммы плоских волн с соответствующими пространственными частотами и комплексными амплитудами dC.

Для плоскости $z \neq 0$ имеем

$$A(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}(\nu_x, \nu_y, z)\exp\left[i \cdot 2\pi(\nu_x x + \nu_y y)\right]d\nu_x d\nu_y, \quad (5.3)$$

где фурье-образ

$$\tilde{A}(\nu_x, \nu_y, z) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} A(x, y, z)\exp\left[-i \cdot 2\pi(\nu_x x + \nu_y y)\right]dxdy \quad (5.4)$$

называют ***угловым спектром волны в плоскости*** z.

5.1.2. Влияние препятствия на угловой спектр волны

Пусть препятствием на пути распространения волны является непрозрачный плоский экран, имеющий бесконечные размеры и содержащий отверстие в некоторой области Σ. Экран располагается в плоскости $z = 0$ (рис. 5.1). Рассмотрим угловой спектр волны после экрана.

Угловой спектр волны, достигающей экрана, равен $\tilde{A}(\nu_x, \nu_y, 0)$. Экран характеризуется амплитудным коэффициентом пропускания

$$\tau_a(x, y) = \begin{cases} 1 & (x, y) \subset \Sigma; \\ 0 & (x, y) \not\subset \Sigma. \end{cases} \quad (5.5)$$

Применим граничные условия Кирхгофа к оптическому возмущению $A(x, y, 0)$, предполагая, что экран не возмущает волны,

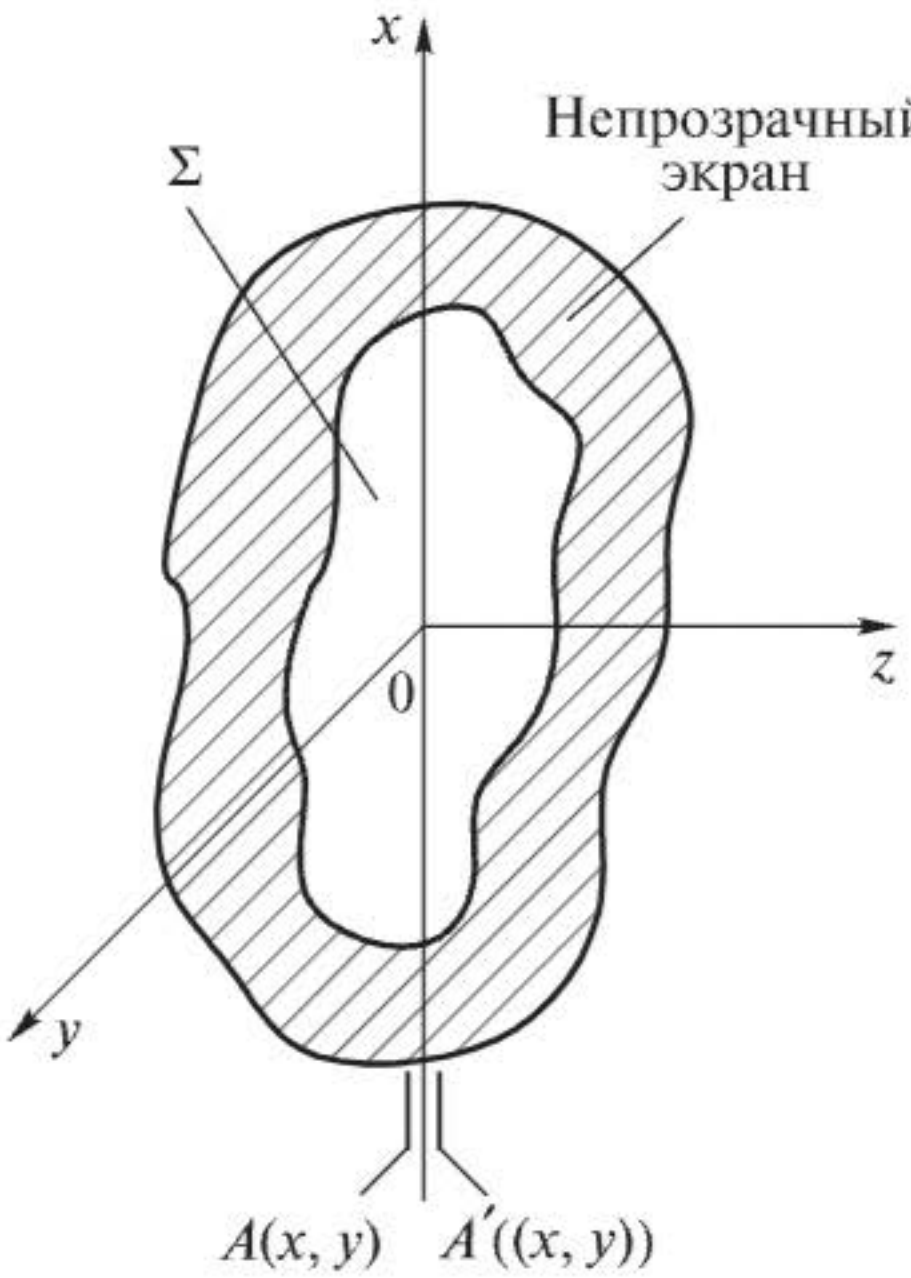


Рис. 5.1. Препятствие в виде экрана с отверстием

падающие на отверстие в экране, и что поле в геометрической тени равно нулю. Таким образом, в плоскости, расположенной сразу за экраном, комплексная амплитуда волны имеет вид

$$A'(x, y, 0) = A(x, y, 0)\tau_a(x, y\ ),$$

где $A(x, y, 0)$ — комплексная амплитуда волны, падающей на экран.

Тогда угловой спектр $\tilde{A}'\left(\nu_x, \nu_y, 0\right)$ прошедшей волны определяется выражением

$$\tilde{A}'\left(\nu_x, \nu_y, 0\right) = F_{xy}\left\{A(x, y, 0)\tau_a(x, y\ )\right\} = \tilde{A}\left(\nu_x, \nu_y, 0\right) \otimes \tilde{\tau}_a\left(\nu_x, \nu_y\right). \quad (5.6)$$

Следовательно, угловой спектр прошедшей волны определяется сверткой пространственно-частотного спектра (ПЧС) падающей волны и фурье-образа амплитудного коэффициента пропускания экрана.

Рассмотрим частный случай, когда на транспарант с косинусоидальным коэффициентом пропускания падает плоская волна (рис. 5.2).

Комплексная амплитуда волны, падающая на транспарант, равна $A(x, y, 0) = a_0$. Ее угловой спектр представляется в виде

$$\tilde{A}\left(\nu_x, \nu_y, 0\right) = a_0\delta\left(\nu_x, \nu_y\right). \quad (5.7)$$

Коэффициент пропускания транспаранта определяется выражением

$$\tau_A^{\text{тр}}(x, y\ ) = \frac{1}{2}\left[1 + \cos\left(2\pi\frac{x}{T_x}\right)\right], \quad (5.8)$$

а фурье-образ — выражением

$$\tilde{\tau}_A^{\text{тр}}\left(\nu_x, \nu_y\right) = \frac{1}{4}\left[2\delta\left(\nu_x\right) + \delta\left(\nu_x - 1/T_x\right) + \delta\left(\nu_x + 1/T_x\right)\right]\delta\left(\nu_y\right). \quad (5.9)$$

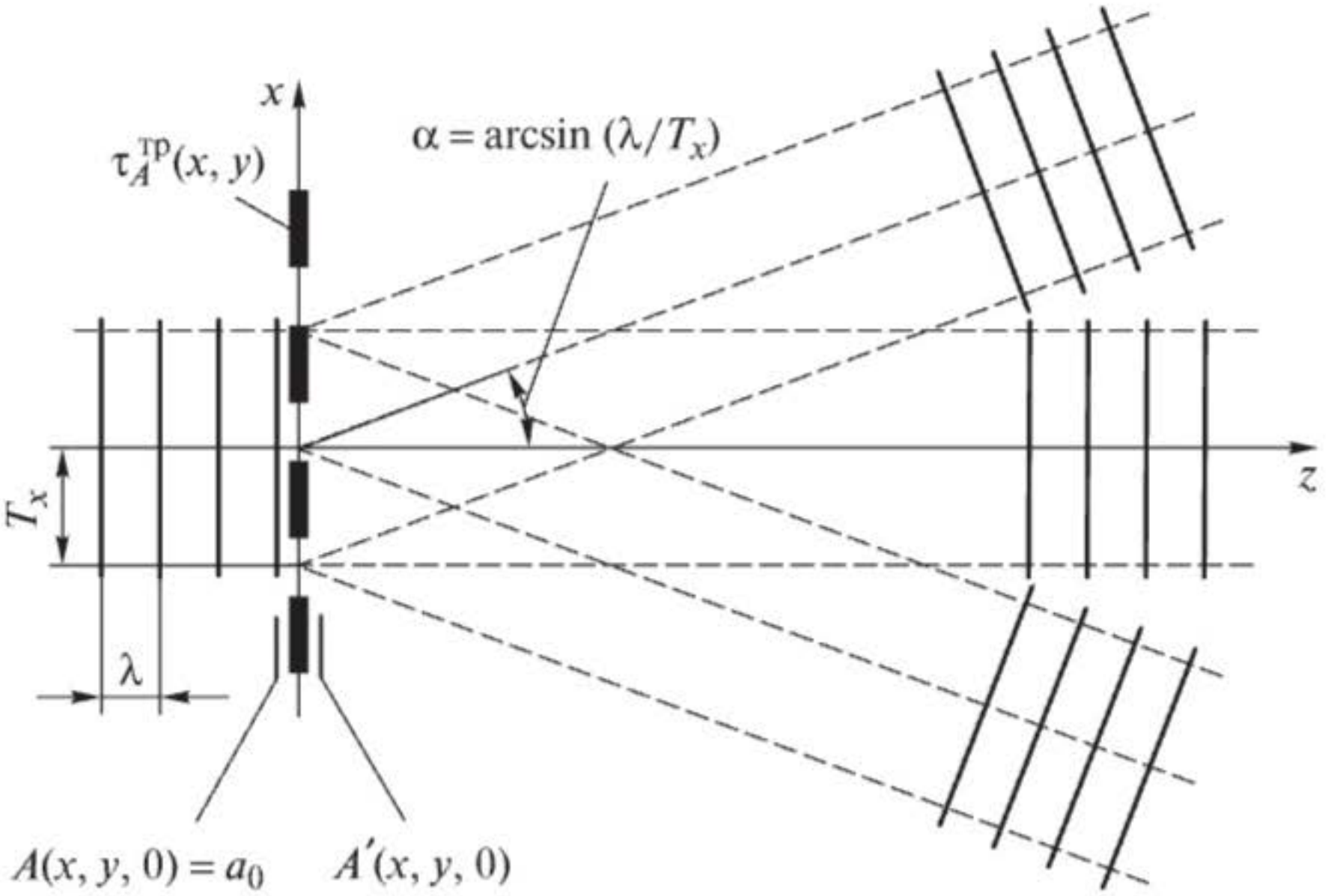


Рис. 5.2. Преобразование плоской волны косинусоидальной решеткой

Подставив выражения (5.7) и (5.9) в формулу (5.6), получим следующее выражение для углового спектра прошедшей волны:

$$\tilde{A}'(\nu_x, \nu_y, 0) =$$

$$= \frac{a_0}{4}\left[2\delta(\nu_x) + \delta(\nu_x - 1/T_x) + \delta(\nu_x + 1/T_x)\right]\delta(\nu_y). \qquad (5.10)$$

Выражение (5.10) подтверждает известный факт, что в результате дифракции плоской волны на неограниченной косинусоидальной решетке образуются три плоские волны.

5.1.3. Когерентная передаточная функция слоя пространства

Предположим, что волна, созданная некоторой произвольной системой монохроматических источников и распространяющаяся в положительном направлении оси z, достигает плоскости I (рис. 5.3).

Пусть поле волны в этой плоскости описывается комплексной амплитудой $A(x, y, 0)$. Необходимо найти комплексную амплитуду поля в плоскости II. В плоскости I угловой спектр волны $A(x, y, 0)$ описывается выражением

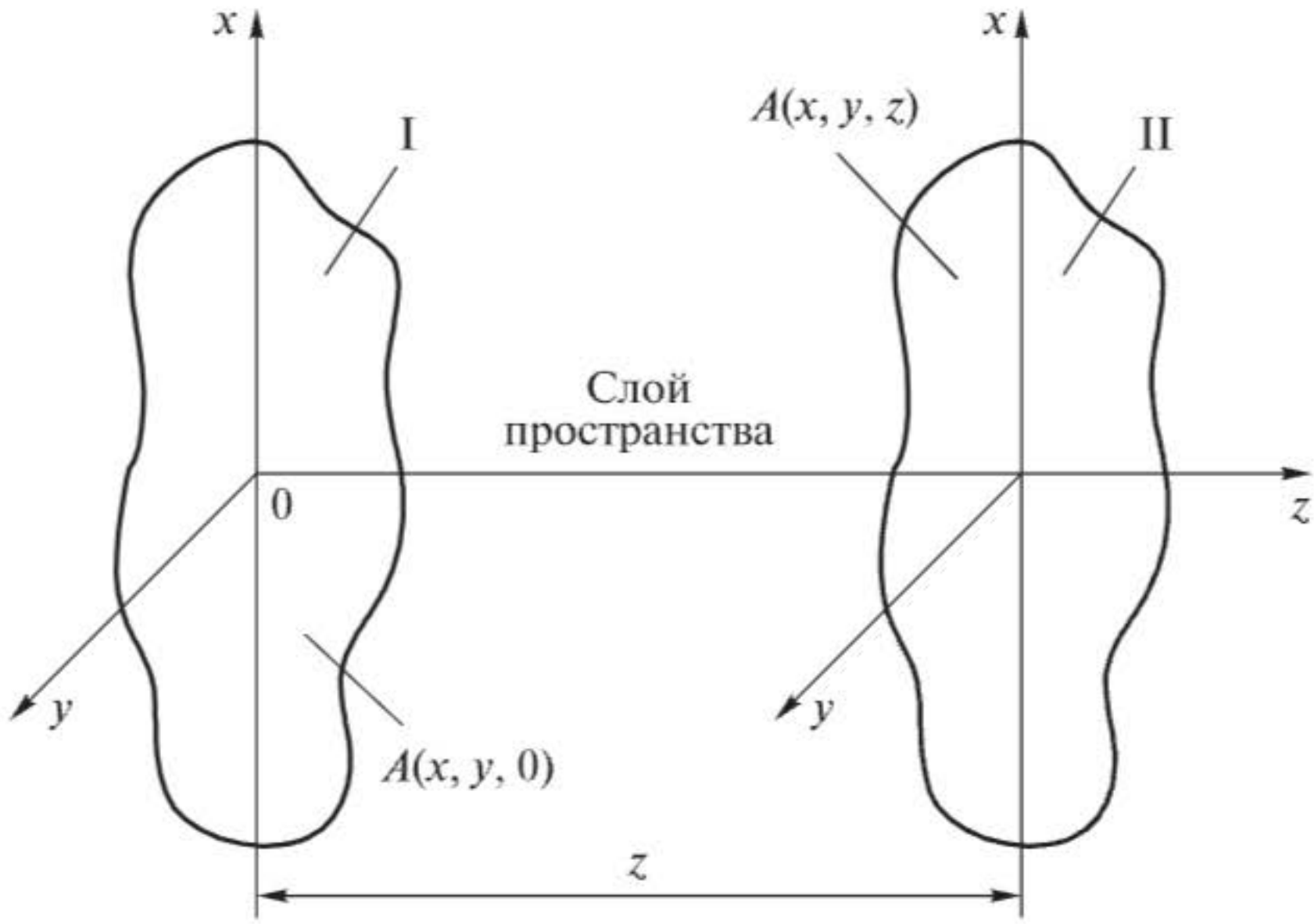


Рис. 5.3. Плоскость дифракции и плоскость наблюдения

$$\tilde{A}\left(\nu_x, \nu_y, 0\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} A(x, y, 0)\exp\left[-i \cdot 2\pi\left(\nu_x x + \nu_y y\right)\right]dxdy. \quad (5.11)$$

Соответственно комплексную амплитуду $A(x, y, 0)$ можно выразить через угловой спектр:

$$A(x, y, 0) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}\left(\nu_x, \nu_y, 0\right)\exp\left[i \cdot 2\pi\left(\nu_x x + \nu_y y\right)\right]d\nu_x d\nu_y. \quad (5.12)$$

Учтем, что в уравнение плоской волны с направляющими косинусами

$$\cos\alpha = \lambda\nu_x,\ \cos\beta = \lambda\nu_y,\ \cos\gamma = \lambda\nu_z = \sqrt{1-\left(\lambda\nu_x\right)^2 - \left(\lambda\nu_y\right)^2}$$

входит двумерный интеграл, представляющий собой бесконечную сумму плоских волн с бесконечно малыми амплитудами $dC = \tilde{A}\left(\nu_x, \nu_y, 0\right)d\nu_x d\nu_y$.

Рассмотрим угловой спектр волны в плоскости II, параллельной плоскости I, но расположенной на расстоянии z от нее. Если $A(x, y, z)$ — комплексная амплитуда волны в плоскости II, то ее угловой спектр имеет вид

$$\tilde{A}(\nu_x, \nu_y, z) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} A(x, y, z)\exp\left[-i\cdot 2\pi\left(\nu_x x + \nu_y y\right)\right]dxdy. \quad (5.13)$$

И обратно, комплексную амплитуду волны можно выразить через угловой спектр

$$A(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}(\nu_x, \nu_y, z)\exp\left[i\cdot 2\pi\left(\nu_x x + \nu_y y\right)\right]d\nu_x d\nu_y. \quad (5.14)$$

Во всех точках, где нет источников излучения, функция $A(x, y, z)$ должна удовлетворять уравнению Гельмгольца (4.6). Для того чтобы определить эту функцию, подставим выражение (5.14) в (4.6). Тогда получим

$$\frac{\partial^2 A(x, y, z)}{\partial x^2} =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}(\nu_x, \nu_y, z)\exp\left[i\cdot 2\pi\left(\nu_x x + \nu_y y\right)\right]d\nu_x d\nu_y =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}(\nu_x, \nu_y, z)\frac{d^2}{dx^2}\left\{\exp\left[i\cdot 2\pi\left(\nu_x x + \nu_y y\right)\right]\right\}d\nu_x d\nu_y =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left(-4\pi^2\nu_x^2\right)\tilde{A}(\nu_x, \nu_y, z)\exp\left[i\cdot 2\pi\left(\nu_x x + \nu_y y\right)\right]d\nu_x d\nu_y. \quad (5.15)$$

Проведя аналогичные преобразования для $\frac{\partial^2 A(x, y, z)}{\partial y^2}$, получим

$$\frac{\partial^2 A(x, y, z)}{\partial y^2} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left(-4\pi^2\nu_y^2\right)\tilde{A}(\nu_x, \nu_y, z)\exp\left[i\cdot 2\pi\left(\nu_x x + \nu_y y\right)\right]d\nu_x d\nu_y. \quad (5.16)$$

Далее

$$\frac{\partial^2 A(x, y, z)}{\partial z^2} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2}{dz^2}\left\{\tilde{A}(\nu_x, \nu_y, z)\right\}\exp\left[i\cdot 2\pi\left(\nu_x x + \nu_y y\right)\right]d\nu_x d\nu_y. \quad (5.17)$$

После подстановки выражений (5.15), (5.16) и (5.17) в (4.6) имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\left[1-(\lambda\nu_x)^2-(\lambda\nu_y)^2\right]\exp\left[i\cdot 2\pi(\nu_x x+\nu_y y)\right]d\nu_x d\nu_y =$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}-\frac{d^2}{dz^2}\left\{\tilde{A}(\nu_x,\nu_y,z)\right\}\exp\left[i\cdot 2\pi(\nu_x x+\nu_y y)\right]d\nu_x d\nu_y. \qquad (5.18)$$

Приравняв подынтегральные выражения, получим соотношение

$$\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\left[1-(\lambda\nu_x)^2-(\lambda\nu_y)^2\right]\tilde{A}(\nu_x,\nu_y,z)\exp\left[i\cdot 2\pi(\nu_x x+\nu_y y)\right]=$$

$$=-\frac{d^2}{dz^2}\left\{\tilde{A}(\nu_x,\nu_y,z)\right\}\exp\left[i\cdot 2\pi(\nu_x x+\nu_y y)\right]. \qquad (5.19)$$

Поскольку функция $\exp\left[i\cdot 2\pi(\nu_x x+\nu_y y)\right]$, входящая как сомножитель в левую и правую части соотношения (5.19), не равна нулю ни при каких значениях x, y, ν_x, ν_y, то ее можно сократить. Тогда получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2}{dz^2}\tilde{A}(\nu_x,\nu_y,z)+\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\left[1-(\lambda\nu_x)^2-(\lambda\nu_y)^2\right]\tilde{A}(\nu_x,\nu_y,z)=0. \qquad (5.20)$$

В этом уравнении аргументом функции $\tilde{A}(\nu_x,\nu_y,z)$ является только z, а ν_x, ν_y — параметры. Характеристическое уравнение для (5.20) имеет вид

$$p^2+\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\left[1-(\lambda\nu_x)^2-(\lambda\nu_y)^2\right]=0. \qquad (5.21)$$

Его решение представим как

$$p_{1,2}=\pm\frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{-\left[1-(\lambda\nu_x)^2-(\lambda\nu_y)^2\right]}=$$

$$=\pm i\frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{1-(\lambda\nu_x)^2-(\lambda\nu_y)^2}. \qquad (5.22)$$

Тогда общее решение дифференциального уравнения (5.20) можно записать в виде

$$\tilde{A}(\nu_x,\nu_y,z)=C_1\exp(p_1 z)+C_2\exp(p_2 z). \qquad (5.23)$$

Выбираем частное решение $C_1 \exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda} z\sqrt{1-(\lambda\nu_x)^2-(\lambda\nu_y)^2}\right]$, которое описывает угловой спектр волны, распространяющейся в положительном направлении оси z. Второе частное решение, соответствующее распространению волны в обратном направлении, не рассматриваем, так как из условия задачи известно, что волна распространяется в положительном направлении оси z и отсутствуют препятствия, которые могли бы быть источником обратной волны.

Для того чтобы найти постоянный множитель C_1, следует учесть, что при $z=0$ угловой спектр волны равен $\tilde{A}(\nu_x, \nu_y, 0)$, тогда

$$\tilde{A}(\nu_x, \nu_y, z)_{z=0} = \tilde{A}(\nu_x, \nu_y, 0) = \\ = C_1 \exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda} z\sqrt{1-(\lambda\nu_x)^2-(\lambda\nu_y)^2}\right]_{z=0}, \qquad (5.24)$$

откуда $C_1 = \tilde{A}(\nu_x, \nu_y, 0)$.

Таким образом, получим решение уравнения (5.20) в виде

$$\tilde{A}(\nu_x, \nu_y, z) = \tilde{A}(\nu_x, \nu_y, 0)\exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda} z\sqrt{1-(\lambda\nu_x)^2-(\lambda\nu_y)^2}\right]. \qquad (5.25)$$

Из формулы (5.25) следует, что для определения углового спектра ПЧС комплексной амплитуды волны в плоскости $z \neq 0$ достаточно угловой спектр волны в плоскости $z=0$ умножить на функцию $\exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda} z\sqrt{1-(\lambda\nu_x)^2-(\lambda\nu_y)^2}\right]$. Следовательно, слой пространства можно рассматривать как ПЧ-фильтр, у которого ПФ описывается выражением

$$\tilde{h}(\nu_x, \nu_y, z) = \frac{\tilde{A}(\nu_x, \nu_y, z)}{\tilde{A}(\nu_x, \nu_y, 0)} = \exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda} z\sqrt{1-(\lambda\nu_x)-(\lambda\nu_y)}\right]. \qquad (5.26)$$

Выражение (5.26) определяет когерентную ПФ (КПФ) слоя пространства.

Применив к (5.25) оператор обратного преобразования Фурье, получим распределение комплексной амплитуды волны в плоскости $z \neq 0$ в виде

$$A(x, y, z) = F^{-1}_{\nu_x\nu_y}\left\{\tilde{A}\left(\nu_x, \nu_y, z\right)\right\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}\left(\nu_x, \nu_y, 0\right)\times$$
$$\times \exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda}z\sqrt{1-\left(\lambda\nu_x\right)^2-\left(\lambda\nu_y\right)^2}\right]\exp\left[i\cdot 2\pi\left(\nu_x x+\nu_y y\right)\right]d\nu_x d\nu_y. \qquad (5.27)$$

Выражение (5.27) определяет комплексную амплитуду скалярного поля во всем пространстве как суперпозицию плоских волн различных направлений с соответствующими амплитудами и фазами.

Из решения уравнения (5.25) следует, что в том случае, когда направляющие косинусы удовлетворяют условию

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta=\left(\lambda\nu_x\right)^2+\left(\lambda\nu_y\right)^2<1, \qquad (5.28)$$

распространение волны на расстояние z приводит только к изменению фазы различных составляющих углового спектра. Фазовые сдвиги возникают вследствие того, что плоские волны распространяются под разными углами и проходят разные расстояния, пока достигнут рассматриваемой точки.

Если же направляющие косинусы удовлетворяют условию

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta=\left(\lambda\nu_x\right)^2+\left(\lambda\nu_y\right)^2>1, \qquad (5.29)$$

то получим другой результат. В этом случае $\sqrt{1-\left(\lambda\nu_x\right)^2-\left(\lambda\nu_y\right)^2}$ будет мнимым числом и тогда

$$\tilde{A}\left(\nu_x, \nu_y, z\right)=\tilde{A}\left(\nu_x, \nu_y, 0\right)\exp\left(-\frac{2\pi}{\lambda}z\mu\right), \qquad (5.30)$$

где $\mu=\sqrt{\left(\lambda\nu_x\right)^2+\left(\lambda\nu_y\right)^2-1}>0.$

Поскольку μ — положительное действительное число, то эти волновые составляющие сильно ослабляются при распространении. Такие составляющие углового спектра называются ***затухающими волнами*** (неоднородными волнами, поверхностными волнами).

Убедимся, что такие волны быстро затухают. Например, при $\lambda=0{,}6$ мкм $=6\cdot10^{-4}$ мм и $z=10^{-2}$ мм получим $\mu=10^{-1}$. Тогда

$$\exp\left(-\frac{2\pi}{\lambda}z\mu\right)=\exp\left(-\frac{6,28\cdot10^{-2}\cdot10^{-1}}{6\cdot10^{-4}}\right)=\exp(-10)=4,5\cdot10^{-5}.$$

Если направляющие косинусы удовлетворяют условию

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta=(\lambda\nu_x)^2+(\lambda\nu_y)^2=1, \tag{5.31}$$

то это соответствует плоским волнам, которые распространяются в направлениях, перпендикулярных оси z и, следовательно, не переносят энергию в направлении распространения излучения.

Окончательно КПФ слоя пространства можно записать в следующем виде:

$$\tilde{h}(\nu_x,\nu_y,z)=\begin{cases}\exp\left[i\dfrac{2\pi}{\lambda}z\sqrt{1-(\lambda\nu_x)^2-(\lambda\nu_y)^2}\right], & \nu_x^2+\nu_y^2\le\dfrac{1}{\lambda^2};\\ \exp\left(-\dfrac{2\pi}{\lambda}z\mu\right)\approx0, & \nu_x^2+\nu_y^2>\dfrac{1}{\lambda^2},\end{cases} \tag{5.32}$$

где $\mu=\sqrt{(\lambda\nu_x)^2+(\lambda\nu_y)^2-1}>0.$

5.1.4. Когерентная передаточная функция слоя пространства в приближении Френеля

Разложим в формуле (5.26) квадратный корень в бином Ньютона:

$$\sqrt{1-(\lambda\nu_x)^2-(\lambda\nu_y)^2}=$$

$$=1-\frac{1}{2}\left[(\lambda\nu_x)^2+(\lambda\nu_y)^2\right]+\frac{1}{8}\left[(\lambda\nu_x)^2+(\lambda\nu_y)^2\right]^2, \tag{5.33}$$

где $\sqrt{1\pm b}=1\pm\frac{1}{2}b\mp\frac{1}{8}b^2\pm\ldots,\quad |b|<1.$

Ограничимся в выражении (5.33) двумя членами разложения, т. е. будем считать, что $\frac{z}{8}\left[(\lambda\nu_x)^2+(\lambda\nu_y)^2\right]^2_{\max}<<1$, или в соответствии с критерием Рэлея запишем следующее условие:

$$\frac{z}{8}\left[(\lambda\nu_x)^2+(\lambda\nu_y)^2\right]^2_{\max}\le\frac{\lambda}{10}. \tag{5.34}$$

Тогда в приближении Френеля КПФ имеет вид

$$\tilde{h}^{\Phi r}\left(\nu_x, \nu_y, z\right) = \exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}z\right)\exp\left[-i\pi\lambda z\left(\nu_x^2 + \nu_y^2\right)\right]. \qquad (5.35)$$

Обычно постоянный фазовый набег $\exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}z\right)$ не учитывают.

Определим верхнюю границу для расстояния z из условия (5.34), тогда

$$z \le \frac{8\lambda}{10\lambda^4\left[\nu_x^2 + \nu_y^2\right]_{\max}^2} \cong \frac{1}{\lambda^3\left[\nu_x^2 + \nu_y^2\right]_{\max}^2}. \qquad (5.36)$$

Введем понятие минимального размера препятствия, который равен $l_{\min} = 1/\nu_{\max}$, где $\nu_{\max} = \left[\sqrt{\nu_x^2 + \nu_y^2}\right]_{\max}$ — наибольшая пространственная частота в ПЧС волны. Если учесть, что $l_{\min}\nu_{\max} = 1$ (из теории спектрального анализа сигналов), для $z_{\max}$ получаем

$$z_{\max} = \frac{l_{\min}^4}{\lambda^3}. \qquad (5.37)$$

5.1.5. Дифракция в приближении «тени»

Найдем распределение комплексной амплитуды волны на небольшом расстоянии z от плоскости дифракции (см. рис. 5.3). Ограничимся в формуле (5.33) одним членом разложения, тогда

$$A(x, y, z) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}\left(\nu_x, \nu_y, 0\right)\exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}z\right)\exp\left[i\cdot 2\pi\left(\nu_x x + \nu_y y\right)\right]d\nu_x d\nu_y =$$

$$= \exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}z\right)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}\left(\nu_x, \nu_y, 0\right)\exp\left[i\cdot 2\pi\left(\nu_x x + \nu_y y\right)\right]d\nu_x d\nu_y =$$

$$= \exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}z\right)A(x, y, 0). \qquad (5.38)$$

Таким образом, дифракционное рассеяние в области тени настолько мало, что им можно пренебречь. Используя критерий

Рэлея, получим следующее условие для оценки верхней границы $z_{\max}$:

$$z\frac{\left[\left(\lambda\nu_x\right)^2+\left(\lambda\nu_y\right)^2\right]_{\max}}{2}\le\frac{\lambda}{10}. \qquad (5.39)$$

Максимальная пространственная частота объекта $\nu_{\max} = \left[\sqrt{\nu_x^2+\nu_y^2}\right]_{\max}$ зависит от размера неоднородности $l_{\min}$ в плоскости $z=0$. Подставив $\nu_{\max}=1/l_{\min}$ в выражение (5.39), получим

$$z_{\max}=0{,}2\frac{l_{\min}^2}{\lambda}. \qquad (5.40)$$

Пример 1: $\lambda=10^{-3}$ мм, $l_{\min}=1$ мм, $z\le z_{\max}=\dfrac{0{,}2}{10^{-3}}=200$ мм.

Пример 2: $\lambda=10^{-3}$ мм, $l_{\min}=10^{-2}$ мм, $z\le z_{\max}=\dfrac{0{,}2\cdot10^{-4}}{10^{-3}}=0{,}02$ мм.

5.2. Дифракционные интегралы

Качественно дифракцию можно определить как любое отклонение оптических лучей от прямой линии, которое нельзя объяснить отражением или преломлением света. Выводы дифракционных интегралов подробно рассмотрены в работах [3, 4] и поэтому здесь не приводятся.

5.2.1. Дифракционный интеграл Рэлея — Зоммерфельда

Если в плоскости дифракции $x0y$ (рис. 5.4) известно распределение комплексной амплитуды волны $A(P)$, то распределение амплитуды волны в плоскости наблюдения определяется дифракционным интегралом Рэлея — Зоммерфельда:

$$A'(Q)=\frac{1}{i\lambda}\iint\limits_{(\Sigma)}A(P)\frac{\exp(ikr)}{r}\cos\left(\vec{r}\,\hat{}\,\vec{n}\right)dS, \qquad (5.41)$$

где $dS=dxdy$.

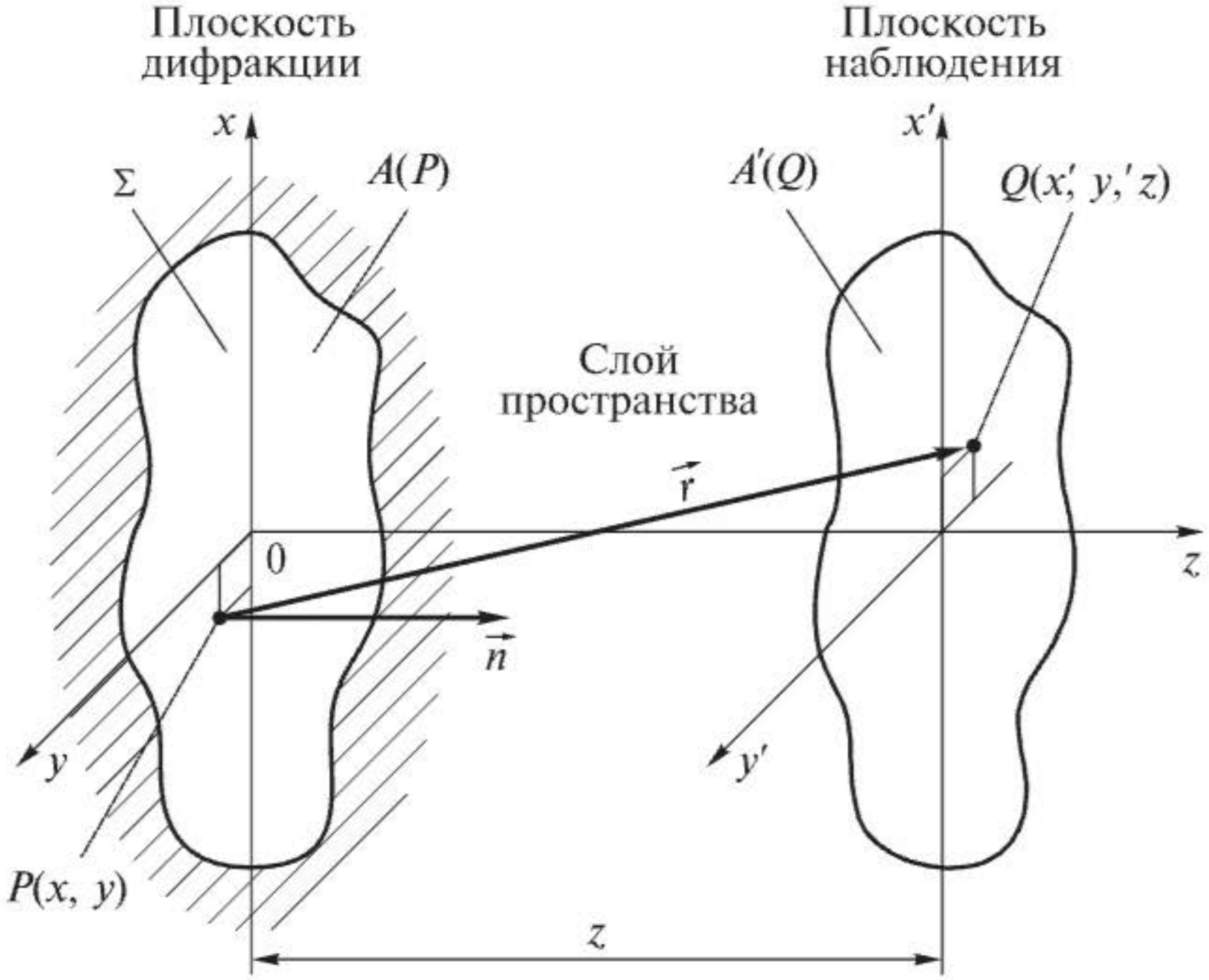


Рис. 5.4. Процесс дифракции

В декартовой системе координат дифракционный интеграл имеет следующий вид:

$$A'(x', y', z) = \frac{1}{i\lambda}\iint\limits_{(\Sigma)} A(x, y, 0)\frac{\exp\left[ik\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+z^2}\right]}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+z^2}}\times$$

$$\times\frac{z}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+z^2}}dxdy. \qquad (5.42)$$

Формулы (5.41) и (5.42) справедливы при условии $z > 400\lambda$ и $\left[\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2}\right]_{\max} >> \lambda$, а также при следующих граничных условиях (граничные условия Кирхгофа):

- распределение амплитуды волны на препятствии размером Σ такое же, каким бы оно было при отсутствии экрана;
- распределение амплитуды волны сразу за непрозрачной частью экрана равно нулю.

В соответствии с этими граничными условиями пределы интегрирования можно брать от $-\infty$ до ∞.

Формулы (5.41) и (5.42) можно представить в виде интегралов суперпозиции:

$$A'(Q) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} A(P)h(Q,P)dS. \qquad (5.43)$$

Здесь $h(Q,P) = \frac{1}{i\lambda}\frac{\exp(ikr)}{r}\cos(\vec{r}\,\hat{}\,\vec{n})$ импульсный отклик слоя пространства, или

$$A'(x',y',z) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} A(x,y,0)h(x',y';x,y)dxdy, \qquad (5.44)$$

где

$$h(x',y',x,y) = \frac{1}{i\lambda}\frac{\exp\left(ik\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+z^2}\right)z}{(x'-x)^2+(y'-y)^2+z^2} = \\ = h(x'-x;y'-y) \qquad (5.45)$$

— импульсный отклик слоя пространства.

5.2.2. Дифракционный интеграл Френеля

Приближение Френеля основывается на следующем допущении: расстояние z между плоскостью дифракции и плоскостью наблюдения значительно больше максимального размера Σ препятствия и максимального размера области наблюдения. С учетом этого можно считать, что $\cos(\vec{r}\,\hat{}\,\vec{n}) \approx 1$, а величина r в знаменателе (5.41) лишь незначительно отличается от z. Отметим, что величину r в экспоненте нельзя просто заменить на z, так как возникающая при этом ошибка умножается на большое число $k = 2\pi/\lambda$ и фазовые погрешности становятся много больше 2π радиан. Дальнейшее упрощение получим, разлагая r в бином Ньютона:

$$r=\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+z^2}=z\sqrt{1+\frac{(x'-x)^2+(y'-y)^2}{z^2}}\approx$$

$$\approx z\left[1+\frac{(x'-x)^2+(y'-y)^2}{2z^2}-\frac{1}{8}\left[\frac{(x'-x)^2+(y'-y)^2}{z^2}\right]^2+\ldots\right]. \quad (5.46)$$

Ограничимся двумя членами разложения, т. е. примем допущение $r\approx z\left[1+\frac{(x'-x)^2+(y'-y)^2}{2z^2}\right]$, которое называют приближением Френеля. С учетом приближения Френеля выражение (5.45) примет вид

$$h(x',y',x,y)=$$

$$=\frac{\exp(ikz)}{i\lambda z}\exp\left\{i\frac{k}{2z}\left[(x'-x)^2+(y'-y)^2\right]\right\}=$$

$$=h(x'-x,y'-y). \quad (5.47)$$

Выражение $h^{\Phi r}(x',y',z)=\frac{\exp(ikz)}{i\lambda z}\exp\left[i\frac{k}{2z}\left(x'^2+y'^2\right)\right]$ определяет импульсный отклик слоя пространства в приближении Френеля. Формулу (5.47) можно считать достаточно точной, если максимальное изменение фазы, вносимое членом третьего порядка, удовлетворяет критерию Рэлея, т. е.

$$\frac{z}{8}\left[\frac{(x'-x)^2+(y'-y)^2}{z^2}\right]_{\max}\le\frac{\lambda}{10},$$

или

$$z^3\ge\frac{5}{4\lambda}\left[(x'-x)^2+(y'-y)^2\right]^2_{\max}.$$

С учетом приближения Френеля интеграл суперпозиции (5.44) можно представить в любой из двух эквивалентных форм. Одна из этих форм имеет вид

$$A'(x', y', z) =$$

$$= \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(x, y, 0) \exp\left[i \frac{k}{2z} \left((x' - x)^2 + (y' - y)^2 \right) \right] dx dy =$$

$$= A(x', y', 0) \otimes h^{\Phi r}(x', y', z). \qquad (5.48)$$

Выражение (5.48) представляет собой свертку функций $A(x', y', 0)$ с импульсным откликом $h^{\Phi r}(x', y', z)$. Если возвести в квадрат члены в аргументе экспоненты, то формулу (5.48) можно привести к виду

$$A'(x', y', z) = \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z} \exp\left[i \frac{k}{2z} \left(x'^2 + y'^2 \right) \right] \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(x, y, 0) \exp\left[i \frac{k}{2z} \left(x^2 + y^2 \right) \right] \times$$

$$\times \exp\left[-i \cdot 2\pi \left(\frac{x'}{\lambda z} x + \frac{y'}{\lambda z} y \right) \right] dx dy. \qquad (5.49)$$

Таким образом, с точностью до амплитудного и фазового множителей, которые не зависят от x, y, функцию $A'(x', y', z)$ можно определить как фурье-образ от произведения функций $A(x, y, 0) \exp\left[i \frac{k}{2z} \left(x^2 + y^2 \right) \right]$ для пространственных частот $\nu_x = x'/\lambda z$, $\nu_y = y'/\lambda z$, что обеспечивает правильный масштаб в плоскости наблюдения. При подстановке $x' = \lambda z \nu_x$, $y' = \lambda z \nu_y$ в формулу (5.49) получим выражение

$$A'(x', y', z) = A'(\lambda z \nu_x, \lambda z \nu_y, z) =$$

$$= \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z} \exp\left[i\pi\lambda z \left(\nu_x^2 + \nu_y^2 \right) \right] \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(x, y, 0) \exp\left[i \frac{k}{2z} \left(x^2 + y^2 \right) \right] \exp\left[-i \cdot 2\pi \left(\nu_x x + \nu_y y \right) \right] dx dy. \quad (5.50)$$

Покажем эквивалентность определения комплексной амплитуды в плоскости наблюдения при использовании ПФ слоя пространства в приближении Френеля и использовании интеграла

Френеля. Для определения распределения комплексной амплитуды в плоскости, отстоящей от плоскости дифракции на расстояние z, необходимо взять обратное преобразование Фурье от углового спектра волны в плоскости z. Тогда запишем

$$A'(x', y', z) = F^{-1}_{\nu_x \nu_y}\left\{\tilde{A}'(\nu_x, \nu_y, z)\right\} =$$

$$= F^{-1}_{\nu_x \nu_y}\left\{\tilde{A}(\nu_x, \nu_y, 0)\exp(ikz)\exp\left[-i\pi\lambda z\left(\nu_x^2 + \nu_y^2\right)\right]\right\}. \quad (5.51)$$

Полученное выражение можно представить в следующем виде:

$$A'(x', y', z) =$$

$$= \exp(ikz)F^{-1}_{\nu_x \nu_y}\left\{\tilde{A}(\nu_x, \nu_y, 0)\right\} \otimes F^{-1}_{\nu_x \nu_y}\left\{\exp\left[-i\pi\lambda z\left(\nu_x^2 + \nu_y^2\right)\right]\right\}. \quad (5.52)$$

Для определения $F^{-1}\left\{\exp\left[-i\pi\lambda z\left(\nu_x^2 + \nu_y^2\right)\right]\right\}$ используем обратное преобразование Фурье от функции $\exp\left[-\pi\left(\nu_x^2 + \nu_y^2\right)\right]$ и теорему подобия фурье-образа. Имеем $F^{-1}_{\nu_x \nu_y}\left\{\exp\left[-\pi\left(\nu_x^2 + \nu_y^2\right)\right]\right\} = \exp\left[-\pi\left(x^2 + y^2\right)\right]$, тогда

$$F^{-1}_{\nu_x \nu_y}\left\{\exp\left[-i\pi\lambda z\left(\nu_x^2 + \nu_y^2\right)\right]\right\} =$$

$$= F^{-1}_{\nu_x \nu_y}\left\{\exp\left[-\pi\left(\left(\sqrt{i\lambda z}\,\nu_x\right)^2 + \left(\sqrt{i\lambda z}\,\nu_y\right)^2\right)\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{i\lambda z}\exp\left[-\pi\left(\frac{x^2}{i\lambda z} + \frac{y^2}{i\lambda z}\right)\right] = \frac{1}{i\lambda z}\exp\left[i\frac{\pi}{\lambda z}\left(x^2 + y^2\right)\right]. \quad (5.53)$$

Подставив выражение (5.53) в (5.52), получим

$$A'(x', y', z) =$$

$$= \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} A(x, y, 0)\exp\left[i\frac{\pi}{\lambda z}\left((x' - x)^2 + (y' - y)^2\right)\right]dxdy. \quad (5.54)$$

Данное выражение эквивалентно первой форме записи дифракционного интеграла Френеля (5.48).

5.2.3. Дифракционный интеграл Фраунгофера

Если в дифракционном интеграле Френеля, записанном во второй форме (5.49), принять допущение, что фазовый множитель $\exp\left[i\frac{k}{2z}\left(x^2+y^2\right)\right]$ по всему отверстию равен единице, то выражение (5.49) преобразуется в дифракционный интеграл Фраунгофера:

$$A'\left(x', y', z\right)=\frac{\exp(ikz)}{i\lambda z}\exp\left[i\frac{k}{2z}\left(x'^2+y'^2\right)\right]\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}A(x, y, 0)\exp\left[-i\cdot 2\pi\left(\frac{x'}{\lambda z}x+\frac{y'}{\lambda z}\right)\right]dxdy. \qquad (5.55)$$

Согласно критерию Рэлея, данное допущение корректно при условии $\frac{1}{2z}\left(x^2+y^2\right)_{\max}\le\frac{\lambda}{10}$, откуда получим

$$z\ge z_{\max}=\frac{5\left(x^2+y^2\right)_{\max}}{\lambda}=\frac{5D^2}{4\lambda}\approx\frac{D^2}{\lambda}, \qquad (5.56)$$

где $D=2\sqrt{\left(x^2+y^2\right)_{\max}}$ — диаметр отверстия в плоскости дифракции.

Если ввести обозначения $\nu_x=x'/\lambda z$, $\nu_y=y'/\lambda z$, то формулу (5.55) можно представить в виде

$$A'\left(x', y', z\right)=A'\left(\lambda z\nu_x, \lambda z\nu_y, z\right)=$$

$$=\frac{\exp(ikz)}{i\lambda z}\exp\left[i\pi\lambda z\left(\nu_x^2+\nu_y^2\right)\right]\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}A(x, y, 0)\exp\left[-i\cdot 2\pi\left(\nu_x x+\nu_y y\right)\right]dxdy. \qquad (5.57)$$

Следовательно, с точностью до множителей, стоящих перед интегралом, комплексная амплитуда в плоскости наблюдения представляет собой фурье-образ комплексной амплитуды в плоскости дифракции.

6. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИГНАЛОВ ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ

6.1. Когерентные, частично когерентные и некогерентные оптические системы

Преобразование сигналов оптической системой существенно зависит от степени когерентности оптического излучения, в параметрах которого кодируется информационное сообщение. Известно [3], что по степени когерентности оптическое излучение подразделяют на когерентное, некогерентное и частично-когерентное. В свою очередь, оптические системы также разделяют на когерентные, некогерентные и частично-когерентные.

6.1.1. Когерентное излучение и когерентная оптическая система

При анализе когерентных оптических систем используется предположение о строгой монохроматичности излучения. Но в природе такого излучения не существует. Существует только квазимонохроматическое излучение, состоящее из спектральных компонент, которые занимают узкий частотный диапазон $\Delta\nu_t$, малый по сравнению со средней частотой. Монохроматичность излучения определяет степень его временно́й когерентности.

Тем не менее для упрощения математического описания принимают допущение о строгой монохроматичности, которое позволяет считать излучение когерентным во времени. При этом фаза волны, возникающей в фиксированной точке P, линейно зависит от времени, поэтому $\varphi(P, t_0 + t) = \varphi(P, t_0) + 2\pi\nu_t t$ при любом значении t.

Кроме того, для источников излучения используют понятие «пространственная когерентность», которое оценивают по результату интерференции излучения от двух источников. Излучение считается пространственно-когерентным, если разность фаз от источников, находящихся в точках P_1 и P_2 волнового поля (рис. 6.1), не изменяется во времени, поэтому $\varphi(P_2, t) - \varphi(P_1, t) = \text{const}$.

Интенсивность излучения в точке Q (см. рис. 6.1) от двух монохроматических источников, расположенных в точках P_1 и P_2, определяется выражением

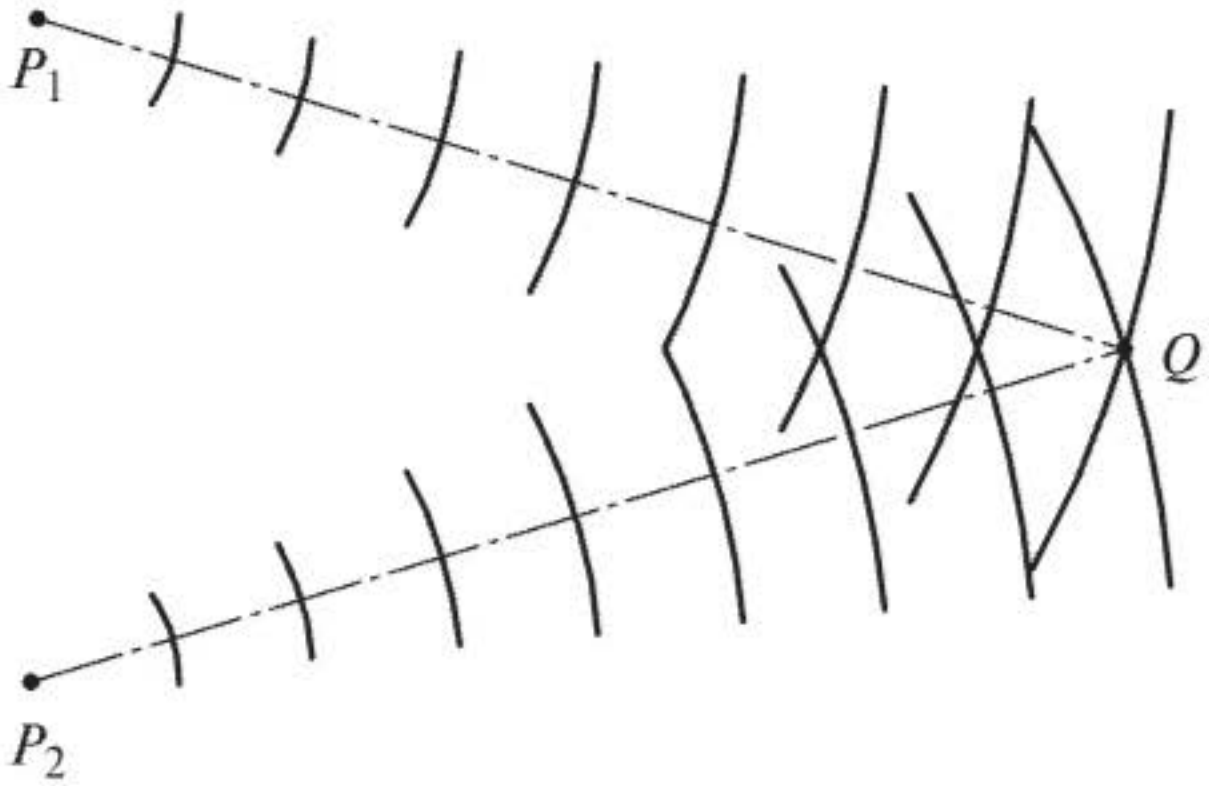


Рис. 6.1. Виртуальный эксперимент по наблюдению излучения в точке Q от источников излучения в точках P_1 и P_2

$$I(Q) = \left\langle \left|U(Q,t)\right|^2 \right\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \left|A(Q)\exp(-i\cdot 2\pi\nu_t t)\right|^2 dt = \left|A(Q)\right|^2, \quad (6.1)$$

где $U(Q,t) = U_1(Q,t) + U_2(Q,t)$ — суммарный пространственно-временной комплексный сигнал в точке Q от источников, имеющих строго монохроматическую частоту ν_t излучения; $A(Q) = A_1(Q) + A_2(Q)$ — суммарная комплексная амплитуда в точке Q; $A_1(Q)$ — комплексная амплитуда в точке Q от источника P_1; $A_2(Q)$ — комплексная амплитуда в точке Q от источника P_2; $\left\langle \left|U(Q,t)\right|^2 \right\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \left|U(Q,t)\right|^2 dt$ — обозначение операции усреднения по времени при $T >> T_0$; T_0 — период колебаний электромагнитной волны.

Подставив в выражение (6.1) $A_1(Q) = a_1(Q)\exp(i\varphi_1)$ и $A_2(Q) = a_2(Q)\exp(i\varphi_2)$, получим

$$\begin{aligned} I(Q) &= \left|a_1(Q)\exp(i\varphi_1) + a_2(Q)\exp(i\varphi_2)\right|^2 = \\ &= \left[a_1(Q)\exp(i\varphi_1) + a_2(Q)\exp(i\varphi_2)\right]\times \\ &\times\left[a_1(Q)\exp(-i\varphi_1) + a_2(Q)\exp(-i\varphi_2)\right] = \\ &= a_1^2(Q) + a_2^2(Q) + a_1(Q)a_2(Q)\exp\left[i(\varphi_1-\varphi_2)\right] + \\ &+ a_1(Q)a_2(Q)\exp\left[-i(\varphi_1-\varphi_2)\right] = \\ &= a_1^2(Q) + a_2^2(Q) + 2a_1(Q)a_2(Q)\cos(\varphi_1-\varphi_2) = \\ &= I_1(Q) + I_2(Q) + 2\sqrt{I_1(Q)I_2(Q)}\cos(\varphi_1-\varphi_2), \end{aligned} \quad (6.2)$$

где $I_1(Q) = a_1^2(Q)$ — интенсивность в точке Q от источника в точке P_1; $I_2(Q) = a_2^2(Q)$ — интенсивность в точке Q от источника в точке P_2.

Последнее слагаемое в выражении (6.2), которое называется интерференционным членом, зависит от разности фаз двух волн от источников излучения в точках P_1 и P_2. Поскольку в произвольной точке Q наблюдения разность фаз $\varphi_1 - \varphi_2$ оптических волн от источников в точках P_1 и P_2 постоянна и не зависит от времени, излучение в точке Q является когерентным.

Если в точке Q плоскости наблюдения складываются волны от N когерентных источников, то результирующая комплексная амплитуда и интенсивность определяются следующими выражениями:

$$A(Q) = \sum_{k=1}^{N} A_k(Q); \qquad I(Q) = \left| \sum_{k=1}^{N} A_k(Q) \right|^2. \tag{6.3}$$

Когерентные оптические сигналы формируются при облучении объектов, например транспарантов, плоскими или сферическими монохроматическими волнами. Если на входе (в предметной плоскости) ОС сигнал является когерентным, то такая ОС называется **когерентной** (КОС). Изображение, формируемое КОС, является результатом суммирования оптических волн, при котором возникает интерференционная картина абсолютного контраста. Как следует из формул (6.2), когерентную ОС можно рассматривать как линейную систему для комплексных амплитуд.

6.1.2. Частично когерентное излучение и частично когерентная оптическая система

Если сигнал на входе (в предметной плоскости) оптической системы формируется частично-когерентным излучением, то оптический сигнал называют частично-когерентным, а ОС — **частично когерентной оптической системой** (ЧКОС). В ЧКОС каждая точка объекта обусловливает определенное распределение комплексной амплитуды поля в плоскости наблюдения. Когда амплитуда и фаза в точках P_1 и P_2 объекта изменяются случай-

ным образом, то также будут изменяться амплитуда и фаза в точке Q плоскости наблюдения. Следовательно, статистическая связь между пространственно-временными комплексными сигналами $U_1(P_1,t)$ и $U_2(P_2,t+\tau)$ в разных точках объекта будет обусловливать статистическую связь этих сигналов в точке Q плоскости наблюдения. Наличие такой связи влияет на интенсивность $I(Q)$, которая определяется путем усреднения по времени и в случае стационарных оптических сигналов имеет вид

$$I(Q)=M\left\{\left|U_1(P_1,t)+U_2(P_2,t+\tau)\right|^2\right\}=$$

$$=\frac{1}{T}\int_0^T\left\{\left|U_1(P_1,t)\right|^2+\left|U_2(P_2,t+\tau)\right|^2+U_1^*(P_1,t)U_2(P_2,t+\tau)+\right.$$

$$\left.+U_2^*(P_2,t+\tau)U_1(P_1,t)\right\}dt=I_1(Q)+I_2(Q)+2\mathrm{Re}\left[\Gamma_{12}(\tau)\right]. \qquad (6.4)$$

Здесь $I_1(Q)=\frac{1}{T}\int_0^T\left|U_1(P_1,t)\right|^2dt$ — интенсивность в точке Q от источника P_1; $I_2(Q)=\frac{1}{T}\int_0^T\left|U_2(P_2,t+\tau)\right|^2dt$ — интенсивность в точке Q от источника P_2; τ — время задержки второй волны относительно первой; $\Gamma_{12}(\tau)=\Gamma_{21}^*(\tau)=M\left\{U_1(P_1,t)U_2^*(P_2,t+\tau)\right\}=$ $=M\left\{U_2(P_2,t+\tau)U_1^*(P_1,t)\right\}$ — ***функция взаимной когерентности***, которая определяется по одной реализации как функция взаимной ковариации стационарных эргодических полей; $\langle\ldots\rangle=$ $=\frac{1}{T}\int_0^T\ldots dt$ — обозначение операции усреднения по времени; $I_1(Q)=\Gamma_{11}(0)$; $I_2(Q)=\Gamma_{22}(0)$.

Введем в рассмотрение ***комплексную степень когерентности***, тогда

$$\gamma_{12}(\tau)=\frac{M\left\{U_1(P_1,t)U_2^*(P_2,t+\tau)\right\}}{\sqrt{M\left\{\left|U_1(P_1,t)\right|^2\right\}}\sqrt{M\left\{\left|U_2(P_2,t+\tau)\right|^2\right\}}}=$$

$$=\frac{\Gamma_{12}(\tau)}{\sqrt{\Gamma_{11}(0)}\sqrt{\Gamma_{22}(0)}}. \qquad (6.5)$$

Модуль комплексной степени когерентности не превышает единицы, т. е. $|\gamma_{12}(\tau)| \le 1$. С учетом выражения (6.5) получим формулу, описывающую в общем виде закон интерференции для стационарных эргодических полей:

$$I(Q) = I_1(Q) + I_2(Q) + 2\sqrt{I_1(Q)I_2(Q)}\,\mathrm{Re}[\gamma_{12}(\tau)], \qquad (6.6)$$

где в отличие от формулы (6.2) интерференционный член полностью определяется степенью когерентности.

Изображение, формируемое ОС, является результатом суммирования оптических волн, при котором, как следует из выражения (6.6), возникает интерференция, зависящая от степени когерентности излучения. Поэтому ЧКОС можно рассматривать как линейную систему относительно функции взаимной когерентности излучения, которая используется для описания оптических сигналов в терминах частично-когерентного излучения.

В случае квазимонохроматического излучения комплексную степень когерентности можно представить в виде

$$\gamma_{12}(\tau) = |\gamma_{12}(\tau)|\exp\left[i\left(\varphi_{12}(\tau) - 2\pi\nu_{\text{ср}}\tau\right)\right], \qquad (6.7)$$

где $\varphi_{12}(\tau) = 2\pi\nu_{\text{ср}}\tau + \arg[\gamma_{12}(\tau)]$; $\nu_{\text{ср}}$ — средняя частота излучения. Тогда выражение (6.6) можно записать следующим образом:

$$I(Q) = I_1(Q) + I_2(Q) +$$
$$+2\sqrt{I_1(Q)I_2(Q)}\,|\gamma_{12}(\tau)|\cos\left[\varphi_{12}(\tau) - 2\pi\nu_{\text{ср}}\tau\right]. \qquad (6.8)$$

Величину $|\gamma_{12}(\tau)|$ называют степенью когерентности колебаний в точках P_1 и P_2. Она определяет видность (контраст) интерференционной картины:

$$V(\tau) = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{2\sqrt{I_1(Q)I_2(Q)}\,|\gamma_{12}(\tau)|}{I_1(Q) + I_2(Q)}. \qquad (6.9)$$

Если интенсивности обеих волн совпадают ($I_1 = I_2$), то видность равна степени когерентности: $V(\tau) = |\gamma_{12}(\tau)|$. Когда $|\gamma_{12}(\tau)|$ достигает максимального значения, равного единице, выражение (6.8) совпадает с (6.2). Этот случай соответствует интерференции абсолютно когерентных волн. При $0 < |\gamma_{12}(\tau)| < 1$ значение видности лежит в этом же интервале.

На практике время задержки τ одной волны относительно другой часто бывает намного меньше времени когерентности, так что $|\tau| << 1/\Delta\nu_t$. При этом условии $|\Gamma_{11}(\tau)|$, $|\Gamma_{22}(\tau)|$, $|\gamma_{12}(\tau)|$ и $\varphi_{12}(\tau)$ незначительно отличаются от $|\Gamma_{11}(0)|$, $|\Gamma_{22}(0)|$, $|\gamma_{12}(0)|$ и $\varphi_{12}(0) = \arg[\gamma_{12}(0)]$. Тогда формулу (6.8) можно приближенно представить в виде

$$I(Q) \approx I_1(Q) + I_2(Q) + 2\sqrt{I_1(Q)I_2(Q)}\,|\gamma_{12}(0)|\cos\left[\varphi_{12}(0) - 2\pi\nu_{cp}\tau\right], \qquad (6.10)$$

где

$$\gamma_{12}(0) = \frac{\Gamma_{12}(0)}{\sqrt{\Gamma_{11}(0)\Gamma_{22}(0)}} = \frac{J_{12}}{\sqrt{J_{11}J_{22}}} = \frac{J_{12}}{\sqrt{I_1(Q)I_2(Q)}} \qquad (6.11)$$

— комплексная степень когерентности при нулевом времени задержки.

Выражение (6.10) является основной формулой в квазимонохроматической теории частичной когерентности. Величину

$$J_{12}(P_1, P_2) = \Gamma_{12}(0) = \left\langle U_1(P_1, t)U_2^*(P_2, t)\right\rangle, \qquad (6.12)$$

характеризующую взаимную ковариацию между колебаниями в двух точках P_1 и P_2 волнового поля, называют **взаимной интенсивностью.** Она зависит только от положения этих точек, но не зависит от времени задержки τ. Поскольку $\Gamma_{12}(\tau) = J_{12}(P_1, P_2)\exp(-i \cdot 2\pi\nu_{cp}\tau)$, то ЧКОС приближенно можно рассматривать как линейную систему относительно взаимной интенсивности.

6.1.3. Некогерентные сигналы и некогерентная оптическая система

Если в выражении (6.8) $|\gamma_{12}(\tau)|$ достигает своего минимального значения, равного нулю, то и видность $V(\tau)$ интерференционной картины также равна нулю. Тогда не возникает никаких интерференционных эффектов от наложения волн в плоскости наблюдения, и излучение является некогерентным. Оптическую систему, работающую при некогерентном освещении, называют **некогерентной оптической системой** (НКОС). На практике такое излучение формирует протяженный полихроматический источник, который можно рассматривать как ансамбль статистически

независимых точечных источников. Разность фаз в интерференционном члене $\mathrm{Re}\left[U_1(P_1,t)U_2^*(P_2,t+\tau)\right]$ для ансамбля статистически независимых источников излучения с одинаковой вероятностью принимает любые значения на периоде $[-\pi,\pi]$. Поэтому $M\left\{\mathrm{Re}\left[U_1(P_1,t)U_2^*(P_2,t+\tau)\right]\right\}=0$ и интенсивность в точке Q (см. рис. 6.1) при некогерентном излучении двух источников

$$I(Q)=I_1(Q)+I_2(Q)=\left|A_1(Q)\right|^2+\left|A_2(Q)\right|^2=a_1^2(Q)+a_2^2(Q), \qquad (6.13)$$

где $a_1(Q)$ — действительная амплитуда в точке Q от источника излучения в точке P_1; $a_2(Q)$ — действительная амплитуда в точке Q от источника излучения в точке P_2.

Если в плоскости наблюдения суммируются N некогерентных волн, то для суммарной интенсивности получим

$$I(Q)=\sum_{k=1}^{N}I_k(Q)=\sum_{k=1}^{N}\left|A_k(Q)\right|^2=\sum_{k=1}^{N}a_k^2(Q). \qquad (6.14)$$

В общем случае сумма превращается в интеграл суперпозиции для распределения интенсивности в НКОС.

6.2. Преобразование оптического сигнала тонкой линзой

Линзы являются основными компонентами ОС. Их используют как оптические компоненты, формирующие изображение объектов, и, как будет показано ниже, для осуществления оптического фурье-преобразования. Здесь мы, не вдаваясь в подробности, связанные с понятиями геометрической оптики, будем рассматривать их как элемент, изменяющий амплитуду и фазу оптической волны. Для этого введем понятие «комплексный амплитудный коэффициент пропускания и отражения тонких оптических элементов».

6.2.1. Комплексные амплитудные коэффициенты пропускания и отражения тонких оптических элементов

Пусть оптический элемент (рис. 6.2), материал которого имеет показатель преломления n, обладает свойствами частичного пропускания и отражения оптического излучения. Этот элемент,

находящийся в вакууме, освещается монохроматической волной, которая описывается комплексной амплитудой $A(x, y) = a(x, y)\exp[i\varphi(x, y)]$. В первом приближении можно пренебречь толщиной этого элемента и рассматривать его как пропускающий и отражающий транспарант.

Волна после прохождения оптического элемента имеет комплексную амплитуду $A'(x, y) = a'(x, y)\exp[i\varphi'(x, y)]$. Преобразование волны, выполняемое оптическим элементом как пропускающим транспарантом, можно характеризовать комплексным коэффициентом пропускания, который определяется выражением

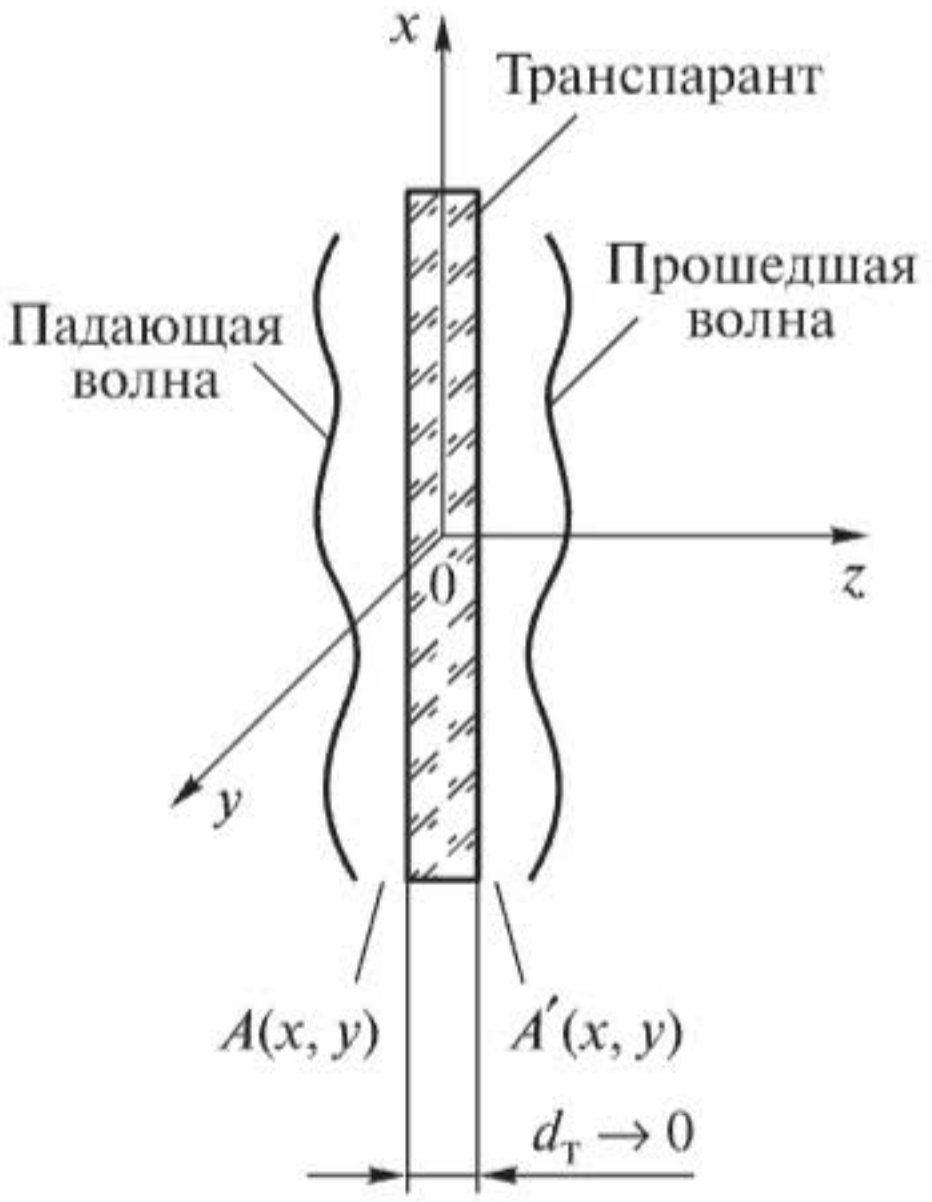


Рис. 6.2. Оптический элемент как амплитудно-фазовый транспарант

$$\tau_A^{тр}(x, y) = \frac{A'(x, y)}{A(x, y)} = \frac{a'(x, y)\exp[i\varphi'(x, y)]}{a(x, y)\exp[i\varphi(x, y)]} =$$

$$= \tau_a^{тр}(x, y)\tau_\varphi^{тр}(x, y), \qquad (6.15)$$

где $\tau_a^{тр}(x, y) = \dfrac{a'(x, y)}{a(x, y)}$ — амплитудный коэффициент пропускания; $\tau_\varphi^{тр}(x, y) = \dfrac{\exp[i\varphi'(x, y)]}{\exp[i\varphi(x, y)]} = \exp[i\Delta\varphi(x, y)]$ — фазовый коэффициент пропускания; $\Delta\varphi(x, y) = \varphi'(x, y) - \varphi(x, y)$.

Поскольку скорость света в материале оптического элемента (транспаранта) меньше, чем скорость света в вакууме, то за счет изменения разности оптической длины пути при прохождении волны через этот транспарант будет возникать разность фаз. Если геометрическая длина пути в материале транспаранта, имеющем показатель преломления n, равна $d(x, y)$, то разность фаз между двумя волнами, прошедшими в вакууме и транспаранте, составит

$$\Delta\varphi(x, y) = \frac{2\pi}{\lambda_n} d(x, y) + \frac{2\pi}{\lambda} d(x, y) =$$

$$= \frac{2\pi n}{\lambda} d(x, y) + \frac{2\pi}{\lambda} d(x, y) = \frac{2\pi}{\lambda} (n-1)\, d(x, y), \qquad (6.16)$$

где $\lambda_n = \dfrac{\lambda}{n}$ — длина волны в материале транспаранта.

Если отраженная от оптического элемента волна имеет комплексную амплитуду $A''(x, y) = a''(x, y)\exp[i\varphi''(x, y)]$, то комплексный коэффициент отражения

$$\rho_A^{\text{тр}}(x, y) = \frac{A''(x, y)}{A(x, y)} = \frac{a''(x, y)}{a(x, y)} \frac{\exp[i\varphi''(x, y)]}{\exp[i\varphi(x, y)]} =$$

$$= \rho_a^{\text{тр}}(x, y)\, \rho_\phi^{\text{тр}}(x, y), \qquad (6.17)$$

где $\rho_a^{\text{тр}}(x, y) = \dfrac{a''(x, y)}{a(x, y)}$ — амплитудный коэффициент отражения;

$\rho_\varphi^{\text{тр}}(x, y) = \dfrac{\exp[i\varphi''(x, y)]}{\exp[i\varphi(x, y)]} = \exp[i\Delta\varphi_1(x, y)]$ — фазовый коэффициент отражения; $\Delta\varphi_1(x, y) = \varphi''(x, y) - \varphi(x, y)$.

В случае некогерентного освещения физические процессы пропускания и отражения характеризуются коэффициентом пропускания и отражения по интенсивности. Эти коэффициенты определяются следующими выражениями:

$$\tau_I^{\text{тр}}(x, y) = \frac{I'(x, y)}{I(x, y)} = \frac{|A'(x, y)|^2}{|A(x, y)|^2} = \left|\tau_A^{\text{тр}}(x, y)\right|^2;$$

$$\rho_I^{\text{тр}}(x, y) = \frac{I''(x, y)}{I(x, y)} = \frac{|A''(x, y)|^2}{|A(x, y)|^2} = \left|\rho_A^{\text{тр}}(x, y)\right|^2. \qquad (6.18)$$

6.2.2. Комплексный коэффициент пропускания тонкой линзы

Линза называется тонкой, если луч, падающий на первую поверхность в точке $M(\xi, \eta)$ (рис. 6.3), выходит из второй поверхности линзы в точке $M'(\xi', \eta')$, которая имеет такие же коорди-

наты, т. е. $\xi' = \xi$, $\eta' = \eta$. В этом случае главные плоскости H и H' совпадают, входной и выходной зрачки совпадают с апертурной диафрагмой и, как следствие, увеличение в зрачках равно единице.

Толщина линзы изменяется в пределах ее апертуры в соответствии с известной зависимостью $d(\xi, \eta)$. Поэтому при прохождении волны через линзу возникает фазовая задержка, которая пропорциональна значению показателя преломления и толщине материала линзы в каждой точке с координатами ξ, η. Для того чтобы учесть размеры и форму линзы при описании преобразования волны, определим функцию зрачка в виде

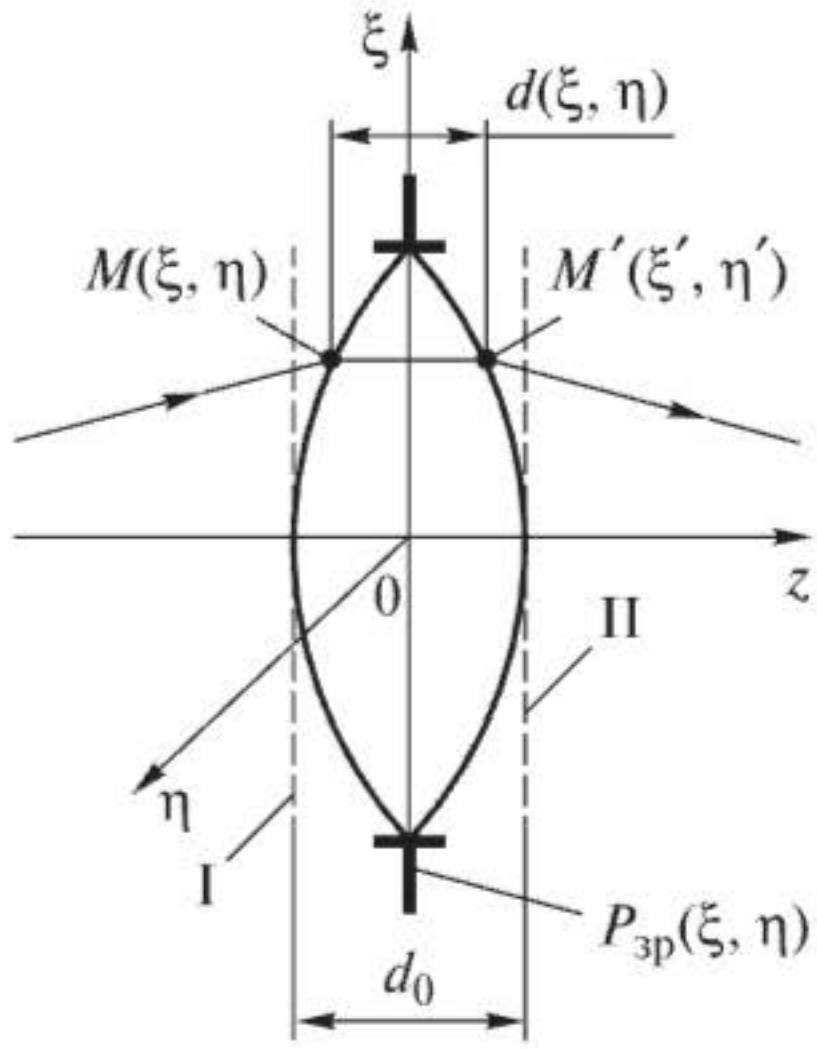


Рис. 6.3. Тонкая линза

$$P_{\text{зр}}(\xi, \eta) = \begin{cases} 1 & (\xi, \eta) \in \Sigma; \\ 0 & (\xi, \eta) \notin \Sigma, \end{cases} \tag{6.19}$$

где Σ — область, задающая размеры и форму зрачка линзы.

При выводе основных зависимостей примем следующие допущения:

1) излучение, падающее на поверхность линзы, монохроматическое;

2) линза тонкая;

3) относительное отверстие линзы, равное $D_{\text{зр}}/f'$, мало (т. е. описание справедливо для параксиальной области).

Пусть распределение комплексной амплитуды волны, падающей на первую поверхность линзы (в плоскости I), описывается функцией

$$A(\xi, \eta) = a(\xi, \eta)\exp\left[i\varphi(\xi, \eta)\right], \tag{6.20}$$

где $a(\xi, \eta)$ — распределение действительной амплитуды волны в плоскости I; $\varphi(\xi, \eta)$ — распределение фазы волны в плоскости I.

Распределение комплексной амплитуды волны после линзы (в плоскости II) обозначим через

$$A'(\xi, \eta) = a'(\xi, \eta)\exp\left[i\varphi'(\xi, \eta)\right], \tag{6.21}$$

где $a'(\xi, \eta)$ — распределение действительной амплитуды в плоскости II; $\varphi'(\xi, \eta)$ — распределение фазы волны в плоскости II.

Тогда по определению комплексный коэффициент пропускания линзы

$$\tau_A^{\text{л}}(\xi, \eta) = \frac{A'(\xi, \eta)}{A(\xi, \eta)} = \frac{a'(\xi, \eta)}{a(\xi, \eta)} \frac{\exp\left[i\varphi'(\xi, \eta)\right]}{\exp\left[i\varphi(\xi, \eta)\right]} = \tau_a^{\text{л}}(\xi, \eta)\tau_\varphi^{\text{л}}(\xi, \eta). \tag{6.22}$$

Следовательно, отношение действительных амплитуд характеризует амплитудный коэффициент пропускания, отношение комплексных экспонент — фазовый коэффициент пропускания. Фазовый коэффициент пропускания запишем в виде

$$\tau_\varphi^{\text{л}}(\xi, \eta) = \exp\left[i\Delta\varphi(\xi, \eta)\right], \tag{6.23}$$

где $\Delta\varphi(\xi, \eta) = \varphi'(\xi, \eta) - \varphi(\xi, \eta)$ характеризует разность фаз при прохождении волны в каждой точке с координатами ξ, η между плоскостями I и II.

Если учесть ограничение размеров линзы апертурной диафрагмой, которое задается функцией $P_{\text{зр}}(\xi, \eta)$ зрачка, то комплексный коэффициент пропускания линзы будет определяться зависимостью

$$\tau_A^{\text{л}}(\xi, \eta) = P_{\text{зр}}(\xi, \eta)\tau_a^{\text{л}}(\xi, \eta)\tau_\varphi^{\text{л}}(\xi, \eta). \tag{6.24}$$

Для реальной линзы амплитудный коэффициент пропускания может быть рассчитан по известным методикам. Поэтому функцию $\tau_a^{\text{л}}(\xi, \eta)$, описывающую амплитудный коэффициент пропускания, будем считать известной. Поскольку $P_{\text{зр}}(\xi, \eta)$ и $\tau_a^{\text{л}}(\xi, \eta)$ известны, то для математического описания преобразования волны требуется определить фазовый коэффициент пропускания $\tau_\varphi^{\text{л}}(\xi, \eta)$. Разность фаз $\Delta\varphi(\xi, \eta)$, входящая в формулу (6.23), определяется выражением

$$\Delta\varphi(\xi, \eta) = \frac{2\pi n}{\lambda} d(\xi, \eta) + \frac{2\pi}{\lambda}\left[d_0 - d(\xi, \eta)\right] =$$

$$= \frac{2\pi}{\lambda}\left[d_0 + (n-1)d(\xi, \eta)\right], \tag{6.25}$$

где $\frac{2\pi n}{\lambda} d(\xi, \eta)$ — набег фазы при распространении волны в стекле для точек с координатами ξ, η; $\frac{2\pi}{\lambda}\left[d_0 - d(\xi, \eta)\right]$ — набег фазы волны при ее прохождении в воздушном промежутке между плоскостями I и II в точках с координатами ξ, η; d_0 — толщина линзы вдоль оптической оси.

Для определения зависимости $d(\xi, \eta)$ представим линзу в виде двух компонентов (рис. 6.4).

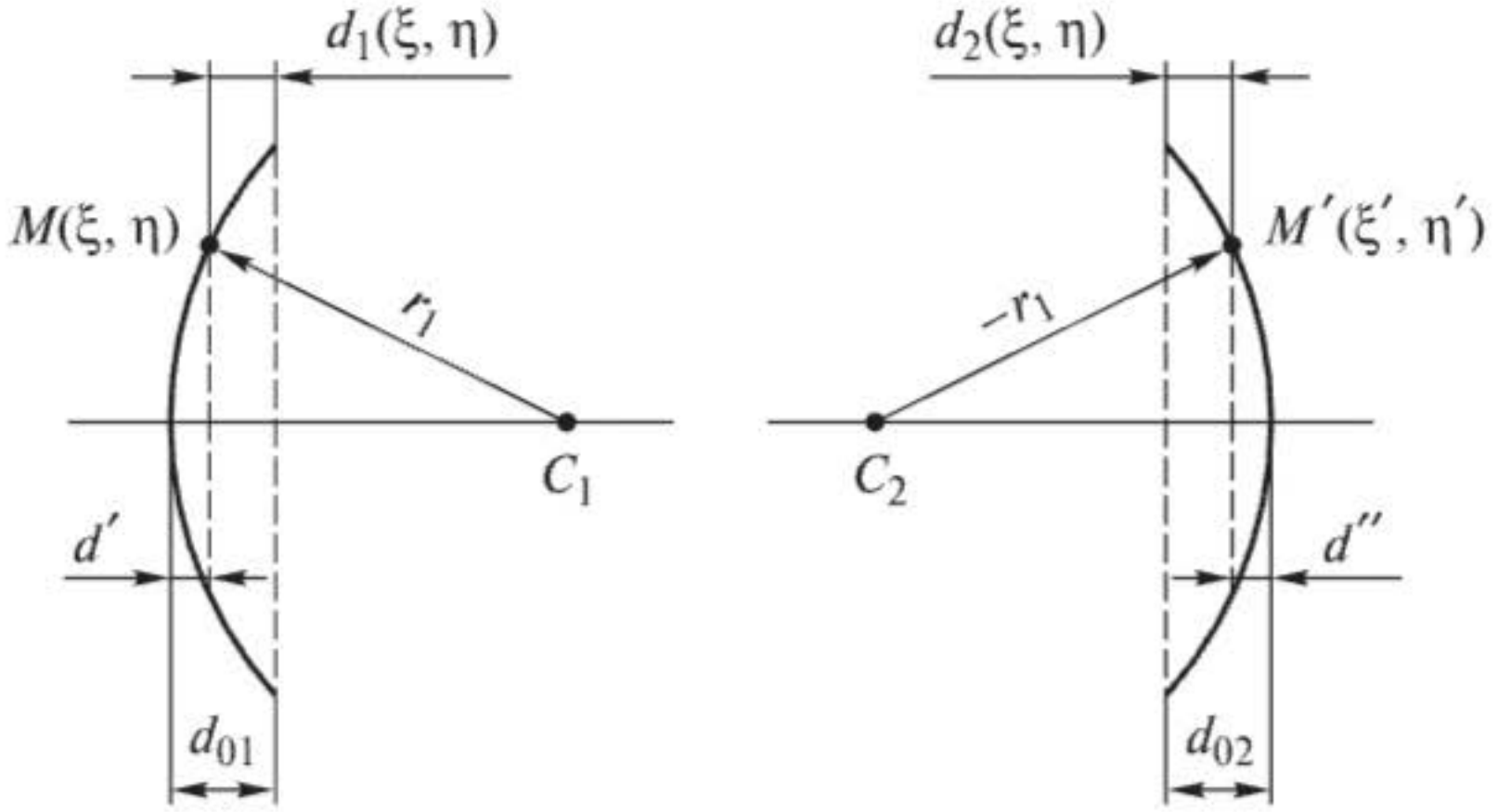


Рис. 6.4. Представление сферической линзы в виде двух компонентов

Для такого представления справедливы следующие соотношения:

$$d_0 = d_{01} + d_{02},\ d(\xi, \eta) = d_1(\xi, \eta) + d_2(\xi, \eta). \qquad (6.26)$$

Исходя из простых геометрических соображений (см. рис. 6.4), можно записать

$$d_1(\xi, \eta) = d_{01} - d' = d_{01} - \left[r_1 - \sqrt{r_1^2 - \left(\xi^2 + \eta^2\right)}\right]; \qquad (6.27)$$

$$d_2(\xi, \eta) = d_{02} - d'' = d_{02} - \left[(-r_2) - \sqrt{r_2^2 - \left(\xi^2 + \eta^2\right)}\right]. \qquad (6.28)$$

Эти выражения можно упростить, если ограничиться параксиальным приближением, т. е. рассматривать преобразование падающего волнового фронта $A(\xi, \eta)$ в области, находящейся вблизи оптической оси. При таком условии квадратные корни, входящие в выражения (6.27) и (6.28), можно разложить в биномиальный

ряд и в соответствии с критерием Рэлея $\left(\frac{r_1}{8}\left(\frac{\xi^2+\eta^2}{r_1^2}\right)^2_{\max} \le \frac{\lambda}{10}\right)$ ограничиться двумя членами.

Тогда для $d_1(\xi,\eta)$ имеем

$$d_1(\xi,\eta) = d_{01} - \left[r_1 - \sqrt{r_1^2 - \left(\xi^2+\eta^2\right)}\right] =$$

$$= d_{01} - r_1\left[1 - \sqrt{1 - \frac{\xi^2+\eta^2}{r_1^2}}\right] =$$

$$= d_{01} - r_1\left[1 - 1 + \frac{\xi^2+\eta^2}{2r_1^2} - -\frac{1}{8}\left(\frac{\xi^2+\eta^2}{r_1^2}\right)^2 + \ldots\right] \approx d_{01} - \frac{\xi^2+\eta^2}{2r_1}. \qquad (6.29)$$

Для $d_2(\xi,\eta)$ получим аналогичное выражение:

$$d_2(\xi,\eta) = d_{02} - \left[-r_2 - \sqrt{r_2^2 - \left(\xi^2+\eta^2\right)}\right] =$$

$$= d_{02} - \left[-r_2 - (-r_2)\sqrt{1 - \frac{\xi^2+\eta^2}{r_2^2}}\right] \approx$$

$$\approx d_{02} + r_2 - r_2\left(1 - \frac{\xi^2+\eta^2}{2r_2^2}\right) = d_{02} + \frac{\xi^2+\eta^2}{2r_2}. \qquad (6.30)$$

Подставив $d_1(\xi,\eta)$ и $d_2(\xi,\eta)$ в выражение (6.25), получим

$$\Delta\varphi(\xi,\eta) = \frac{2\pi}{\lambda}\left[d_0 + (n-1)d(\xi,\eta)\right] =$$

$$= \frac{2\pi}{\lambda}\left[d_0 + (n-1)\left(d_{01} + d_{02} - \frac{\xi^2+\eta^2}{2}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\right)\right] =$$

$$= \frac{2\pi}{\lambda}\left[d_0 + nd_0 - d_0 - (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\left(\frac{\xi^2+\eta^2}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{2\pi}{\lambda}\left(nd_0 - \frac{\xi^2+\eta^2}{2f'}\right), \qquad (6.31)$$

где $\frac{1}{f'} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$ — оптическая сила тонкой линзы.

Подставив выражение (6.31) в формулу, описывающую фазовый коэффициент пропускания тонкой линзы, получим

$$\tau_{\varphi}^{л}(\xi,\eta)=\exp\left[i\Delta\varphi(\xi,\eta)\right]=\exp(iknd_0)\exp\left[-i\frac{k}{2f'}(\xi^2+\eta^2)\right]=$$

$$=\exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}nd_0\right)\exp\left[-i\frac{\pi}{\lambda f'}(\xi^2+\eta^2)\right]. \qquad (6.32)$$

С учетом выведенных соотношений и в соответствии с формулой (6.24) запишем следующее выражение для комплексного коэффициента пропускания тонкой линзы:

$$\tau_{A}^{л}(\xi,\eta)=P_{зр}(\xi,\eta)\tau_{a}^{л}(\xi,\eta)\exp(iknd_0)\exp\left[-i\frac{k}{2f'}(\xi^2+\eta^2)\right]=$$

$$=P_{зр}(\xi,\eta)\tau_{a}^{л}(\xi,\eta)\exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}nd_0\right)\exp\left[-i\frac{\pi}{\lambda f'}(\xi^2+\eta^2)\right]. \qquad (6.33)$$

Первый экспоненциальный множитель, который определяет постоянный фазовый набег, вносимый линзой, в практических расчетах не учитывается. Поэтому для комплексного коэффициента пропускания линзы получаем следующую окончательную формулу:

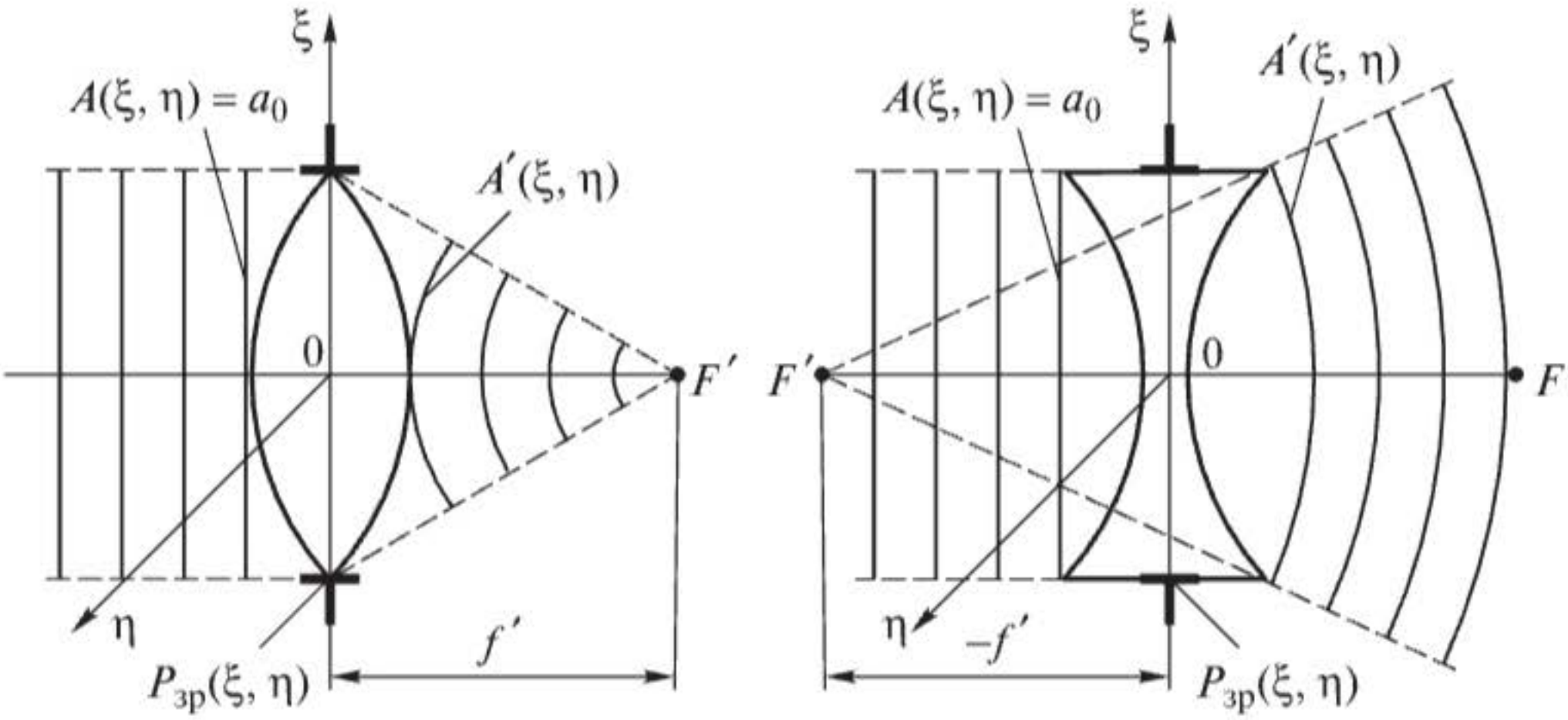
$$\tau_{A}^{л}(\xi,\eta)=P_{зр}(\xi,\eta)\tau_{a}^{л}(\xi,\eta)\exp\left[-i\frac{k}{2f'}(\xi^2+\eta^2)\right]=$$

$$=P_{зр}(\xi,\eta)\tau_{a}^{л}(\xi,\eta)\exp\left[-i\frac{\pi}{\lambda f'}(\xi^2+\eta^2)\right]. \qquad (6.34)$$

Как следует из формулы (6.34), знак фазового сдвига, вносимого линзой, зависит от знака фокусного расстояния f' линзы.

Пусть однолинзовый объектив (рис. 6.5) освещается плоской монохроматической волной с амплитудой $a_0=1$. Тогда комплексная амплитуда волны после объектива описывается выражением

$$A'(\xi,\eta)=P_{зр}(\xi,\eta)\tau_{a}^{л}(\xi,\eta)\exp\left(-i\frac{\pi}{\lambda f'}(\xi^2+\eta^2)\right). \qquad (6.35)$$



а *б*

Рис. 6.5. Преобразование плоской волны положительной (*а*) и отрицательной (*б*) линзами

Если линза положительная, т. е. $f' > 0$ (рис. 6.5, *а*), то волна на выходе линзы является сходящейся. Если линза отрицательная, т. е. $f' < 0$ (рис. 6.5, *б*), то волна на выходе линзы расходящаяся.

6.2.3. Преобразование Фурье, выполняемое тонкой линзой

Известно, что преобразование Фурье — это линейная математическая операция, в результате выполнения которой функция, заданная в координатном пространстве, представляется проекциями в ортогональном базисе гармонических функций. Однако преобразование Фурье может быть реализовано не только путем выполнения математических вычислений, но и с помощью объективов, когда предмет подсвечивается когерентным излучением. Способность объективов выполнять операцию двумерного преобразования Фурье является одним из уникальных и полезных свойств, которые используются в системах оптической обработки сигналов.

Возможны два варианта взаимного расположения объектива и предмета в виде транспаранта, когда при наличии подсветки когерентным излучением реализуется преобразование Фурье: транспарант расположен перед объективом; транспарант расположен за объективом.

В обоих случаях будем полагать, что объектив представляет собой идеальную ОС в виде тонкой положительной линзы. Транс-

парант, являющийся объектом преобразования, представляет собой тонкий амплитудно-фазовый транспарант, который характеризуется комплексным коэффициентом пропускания $\tau_A^{\text{тр}}(x, y)$.

Транспарант расположен перед линзой

Пусть транспарант с комплексным коэффициентом пропускания $\tau_A^{\text{тр}}(x, y)$ расположен на некотором небольшом расстоянии a от линзы и подсвечивается плоской монохроматической волной с амплитудой a_0 (рис. 6.6).

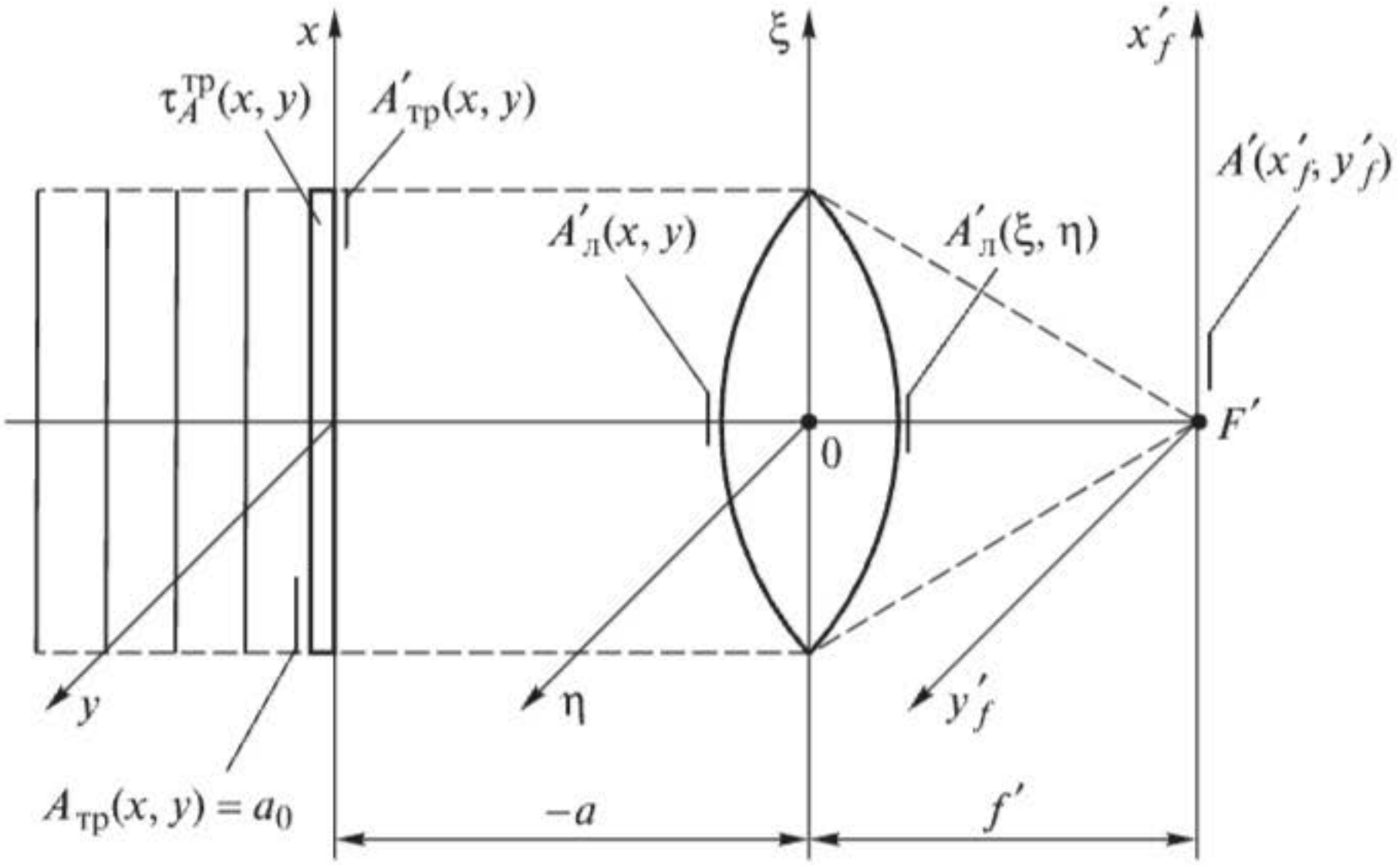


Рис. 6.6. Схема фурье-преобразующей системы при расположении транспаранта перед линзой

Найдем последовательно математические выражения для комплексной амплитуды на выходе транспаранта, перед линзой, за линзой и в плоскости наблюдения $x'_f 0 y'_f$, совпадающей с задней фокальной плоскостью.

Поскольку транспарант подсвечен плоской волной, то пространственное распределение комплексной амплитуды после транспаранта определяется функцией

$$A'_{\text{тр}}(x, y) = a_0 \tau_A^{\text{тр}}(x, y),$$

а ее ПЧС — выражением

$$\tilde{A}'_{\text{тр}}(\nu_x, \nu_y) = a_0 \tilde{\tau}_A^{\text{тр}}(\nu_x, \nu_y).$$

Слой пространства от транспаранта до поверхности линзы будем характеризовать КПФ, которая в приближении Френеля имеет вид

$$\tilde{h}^{\Phi\text{г}}(\nu_x, \nu_y) = \exp\left[i\pi\lambda a\left(\nu_x^2 + \nu_y^2\right)\right].$$

Тогда ПЧС комплексной амплитуды перед линзой можно описать выражением

$$\tilde{A}_{\text{л}}(\nu_x, \nu_y) = \tilde{A}'_{\text{тр}}(\nu_x, \nu_y)\tilde{h}^{\Phi\text{г}}(\nu_x, \nu_y) =$$

$$= a_0 \tilde{\tau}_A^{\text{тр}}(\nu_x, \nu_y)\exp\left[i\pi\lambda a\left(\nu_x^2 + \nu_y^2\right)\right]. \qquad (6.36)$$

Комплексная амплитуда волны перед линзой определяется выражением

$$A_{\text{л}}(\xi, \eta) = F^{-1}_{\nu_x\nu_y}\left\{\tilde{A}_{\text{л}}(\nu_x, \nu_y)\right\} =$$

$$= F^{-1}_{\nu_x\nu_y}\left\{a_0 \tilde{\tau}_A^{\text{тр}}(\nu_x, \nu_y)\exp\left[i\pi\lambda a\left(\nu_x^2 + \nu_y^2\right)\right]\right\}. \qquad (6.37)$$

Комплексная амплитуда волны непосредственно за линзой

$$A'_{\text{л}}(\xi, \eta) = A_{\text{л}}(\xi, \eta)\tau_A^{\text{л}}(\xi, \eta),$$

где $\tau_A^{\text{л}}(\xi, \eta)$ — комплексный коэффициент пропускания линзы, который определяется выражением (6.34).

Рассмотрим два случая, в первом из которых размеры зрачка $P_{\text{зр}}(\xi, \eta)$ не ограничены, а во втором случае — ограничены. В обоих случаях будем полагать, что $\tau_a^{\text{л}}(\xi, \eta) = 1$.

Размеры зрачка не ограничены

При этом $P_{\text{зр}}(\xi, \eta) = 1$ при любых значениях ξ и η, а комплексный коэффициент пропускания линзы $\tau_A^{\text{л}}(\xi, \eta) =$

$$= \exp\left[-i\frac{\pi}{\lambda f'}\left(\xi^2 + \eta^2\right)\right].$$

Тогда комплексная амплитуда волны непосредственно за линзой

$$A'_{\text{л}}(\xi,\eta) =$$

$$= F^{-1}_{\nu_x\nu_y}\left\{a_0\tilde{\tau}^{\text{тр}}_A(\nu_x,\nu_y)\exp\left[i\pi\lambda a\left(\nu_x^2+\nu_y^2\right)\right]\right\}\times$$

$$\times\exp\left[-i\frac{\pi}{\lambda f'}\left(\xi^2+\eta^2\right)\right]. \qquad (6.38)$$

Комплексную амплитуду волны в фокальной плоскости $x'_f 0 y'_f$ линзы определим, используя дифракционный интеграл Френеля. С учетом выражения (5.49) получим

$$A'\left(x'_f, y'_f\right) = \frac{\exp\left[i\frac{\pi}{\lambda f'}\left(x'^2_f + y'^2_f\right)\right]}{i\lambda f'}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} A'_{\text{л}}(\xi,\eta)\exp\left[i\frac{\pi}{\lambda f'}\left(\xi^2+\eta^2\right)\right]\times$$

$$\times\exp\left[-i2\pi\left(\frac{x'_f}{\lambda f'}\xi+\frac{y'_f}{\lambda f'}\eta\right)\right]d\xi d\eta. \qquad (6.39)$$

Если в выражение (6.39) ввести пространственные частоты $\frac{x'_f}{\lambda f'} = \nu_x$ и $\frac{y'_f}{\lambda f'} = \nu_y$, то

$$A'\left(x'_f, y'_f\right) = A'\left(\lambda f'\nu_x, \lambda f'\nu_y\right) = \frac{\exp\left[i\pi\lambda f'\left(\nu_x^2+\nu_y^2\right)\right]}{i\lambda f'}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} A'_{\text{л}}(\xi,\eta)\exp\left[i\frac{\pi}{\lambda f'}\left(\xi^2+\eta^2\right)\right]\exp\left[-i\cdot 2\pi\left(\nu_x\xi+\nu_y\eta\right)\right]d\xi d\eta =$$

$$= \frac{\exp\left[i\pi\lambda f'\left(\nu_x^2+\nu_y^2\right)\right]}{i\lambda f'}F_{\xi\eta}\left\{A'_{\text{л}}(\xi,\eta)\exp\left[i\frac{\pi}{\lambda f'}\left(\xi^2+\eta^2\right)\right]\right\}. \qquad (6.40)$$

Подставив в (6.40) ранее выведенное выражение для $A'_{\text{л}}(\xi,\eta)$, получим выражение для комплексной амплитуды волны в фокальной плоскости линзы:

$$A'\left(x'_f, y'_f\right) = A'\left(\lambda f' \nu_x, \lambda f' \nu_y\right) = \frac{\exp\left[i\pi\lambda f'\left(\nu_x^2 + \nu_y^2\right)\right]}{i\lambda f'} a_0 \times$$

$$\times F_{\xi\eta}\left\{F^{-1}_{\nu_x\nu_y}\left\{\tilde{\tau}_A^{\text{тр}}\left(\nu_x, \nu_y\right)\exp\left[i\pi\lambda a\left(\nu_x^2 + \nu_y^2\right)\right]\right\}\times\right.$$

$$\left.\times\exp\left[-\frac{\pi}{\lambda f'}\left(\xi^2 + \eta^2\right)\right]\exp\left[i\frac{\pi}{\lambda f'}\left(\xi^2 + \eta^2\right)\right]\right\} =$$

$$= \frac{a_0}{i\lambda f'}\exp\left[i\pi\lambda\left(f' + a\right)\left(\nu_x^2 + \nu_y^2\right)\right]\tilde{\tau}_A^{\text{тр}}\left(\nu_x, \nu_y\right). \qquad (6.41)$$

Таким образом, с точностью до амплитудно-фазового множителя комплексная амплитуда волны в фокальной плоскости линзы совпадает с фурье-образом $\tilde{\tau}_A^{\text{тр}}\left(\nu_x, \nu_y\right)$ функции пропускания транспаранта.

Рассмотрим два частных случая:

а) транспарант располагается вплотную к объективу, т. е. $a = 0$. В данном случае имеем

$$A'\left(x'_f, y'_f\right) = A'\left(\lambda f' \nu_x, \lambda f' \nu_y\right) =$$

$$= \frac{a_0 \exp\left[i\pi\lambda f'\left(\nu_x^2 + \nu_y^2\right)\right]}{i\lambda f'}\tilde{\tau}_A^{\text{тр}}\left(\nu_x, \nu_y\right). \qquad (6.42)$$

При этом фазовое искажение сохраняется;

б) транспарант расположен в передней фокальной плоскости объектива, т. е. $a = f = -f'$.

Подставив в (6.41) $a = -f'$, получим

$$A'\left(x'_f, y'_f\right) = A'\left(\lambda f' \nu_x, \lambda f' \nu_y\right) =$$

$$= \frac{a_0 \exp\left[i\pi\lambda\left(f' - f'\right)\left(\nu_x^2 + \nu_y^2\right)\right]}{i\lambda f'}\tilde{\tau}_A^{\text{тр}}\left(\nu_x, \nu_y\right) = \frac{a_0}{i\lambda f'}\tilde{\tau}_A^{\text{тр}}\left(\nu_x, \nu_y\right). \qquad (6.43)$$

В этом случае с точностью до амплитудного множителя комплексная амплитуда волны в задней фокальной плоскости объектива совпадает с фурье-образом комплексного коэффициента пропускания транспаранта.

Зрачок имеет ограниченные размеры

При этом условии

$$P_{\text{зр}}(\xi, \eta) = \begin{cases} 1 & \xi, \eta \in \Sigma; \\ 0 & \xi, \eta \notin \Sigma, \end{cases} \tag{6.44}$$

где Σ — область зрачка тонкой линзы.

В общем случае ($a \neq 0$) комплексная амплитуда непосредственно после линзы имеет вид

$$A'_{\text{л}}(\xi, \eta) = A_{\text{л}}(\xi, \eta) P_{\text{зр}}(\xi, \eta) \tau_{\varphi}^{\text{л}}(\xi, \eta) =$$

$$= a_0 F^{-1}_{\nu_x \nu_y} \left\{ \tilde{\tau}_A^{\text{тр}}(\nu_x, \nu_y) \tilde{h}^{\text{Фг}}(\nu_x, \nu_y) \right\} \times$$

$$\times P_{\text{зр}}(\xi, \eta) \exp\left[-i \frac{\pi}{\lambda f'} (\xi^2 + \eta^2) \right]. \tag{6.45}$$

Подставив (6.45) в (6.39), получим следующее выражение для комплексной амплитуды волны в фокальной плоскости линзы:

$$A'(x'_f, y'_f) = \frac{a_0 \exp\left[i \frac{\pi}{\lambda f'} (x'^2_f + y'^2_f) \right]}{i \lambda f'} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F^{-1}_{\nu_x \nu_y} \left\{ \tilde{\tau}_A^{\text{тр}}(\nu_x, \nu_y) \exp\left[i \pi \lambda a (\nu_x^2 + \nu_y^2) \right] \right\} \times$$

$$\times P_{\text{зр}}(\xi, \eta) \exp\left[-i \frac{\pi}{\lambda f'} (\xi^2 + \eta^2) \right] \exp\left[i \frac{\pi}{\lambda f'} (\xi^2 + \eta^2) \right] \times$$

$$\times \exp\left[-i \cdot 2\pi \left(\frac{x'_f}{\lambda f'} \xi + \frac{y'_f}{\lambda f'} \eta \right) \right] d\xi d\eta. \tag{6.46}$$

Используя обозначения для пространственных частот $\frac{x'_f}{\lambda f'} = \nu_x$ и $\frac{y'_f}{\lambda f'} = \nu_y$, получим выражение для комплексной волны в фокальной плоскости линзы в виде

$$A'\left(x'_f, y'_f\right) = \frac{a_0 \exp\left[i\frac{\pi}{\lambda f'}\left(x'^2_f + y'^2_f\right)\right]}{i\lambda f'} \times$$

$$\times F_{\xi\eta}\left\{F^{-1}_{\nu_x\nu_y}\left\{\tilde{\tau}^{\text{тр}}_A\left(\nu_x, \nu_y\right)\exp\left[i\pi\lambda a\left(\nu_x^2 + \nu_y^2\right)\right]\right\} P_{\text{зр}}(\xi, \eta)\right\} =$$

$$= \frac{a_0 \exp\left[i\pi\lambda f'\left(\nu_x^2 + \nu_y^2\right)\right]}{i\lambda f'}\left[\tilde{\tau}^{\text{тр}}_A\left(\nu_x, \nu_y\right)\exp\left[i\pi\lambda a\left(\nu_x^2 + \nu_y^2\right)\right]\right] \otimes$$

$$\otimes \tilde{P}_{\text{зр}}\left(\nu_x, \nu_y\right) = A'\left(\lambda f'\nu_x, \lambda f'\nu_y\right). \qquad (6.47)$$

Таким образом, получили следующий результат: комплексная амплитуда в задней фокальной плоскости линзы с точностью до амплитудно-фазового множителя равна свертке фурье-образа функции зрачка с произведением фурье-образа транспаранта и передаточной функции слоя пространства в приближении Френеля.

Рассмотрим частные случаи.

1. Транспарант расположен вплотную к линзе, т. е. $a = 0$. В этом случае

$$A'\left(x'_f, y'_f\right) =$$

$$= \frac{a_0 \exp\left[i\pi\lambda f'\left(\nu_x^2 + \nu_y^2\right)\right]}{i\lambda f'}\left[\tilde{\tau}^{\text{тр}}_A\left(\nu_x, \nu_y\right) \otimes \tilde{P}_{\text{зр}}\left(\nu_x, \nu_y\right)\right]. \qquad (6.48)$$

В данном случае комплексная амплитуда волны в задней фокальной плоскости объектива с точностью до амплитудно-фазового множителя равна свертке фурье-образов функции зрачка и транспаранта.

2. Транспарант расположен в передней фокальной плоскости объектива, т. е. $a = f = -f'$.

В этом случае

$$A'\left(x'_f, y'_f\right) = A'\left(\lambda f'\nu_x, \lambda f'\nu_y\right) = \frac{a_0 \exp\left[i\pi\lambda f'\left(\nu_x^2 + \nu_y^2\right)\right]}{i\lambda f'} \times$$

$$\times\left[\tilde{\tau}^{\text{тр}}_A\left(\nu_x, \nu_y\right)\exp\left[-i\pi\lambda f'\left(\nu_x^2 + \nu_y^2\right)\right]\right] \otimes \tilde{P}_{\text{зр}}\left(\nu_x, \nu_y\right). \qquad (6.49)$$

Рассмотрим влияние размеров зрачка на формирование фурье-образа транспаранта в фокальной плоскости объектива. Пусть расстояние $-a$ настолько мало, что соблюдаются условия дифракции в приближении «тени». При этом, как следует из построений на рис. 6.7, комплексная амплитуда волны в точке $Q'\left(x'_f, y'_f\right)$ определяется суммой амплитуд от всех точек транспаранта, для которых лучи под углами $\alpha_x \approx x'_f / f'$ и $\alpha_y \approx y'_f / f'$ проходят через объектив.

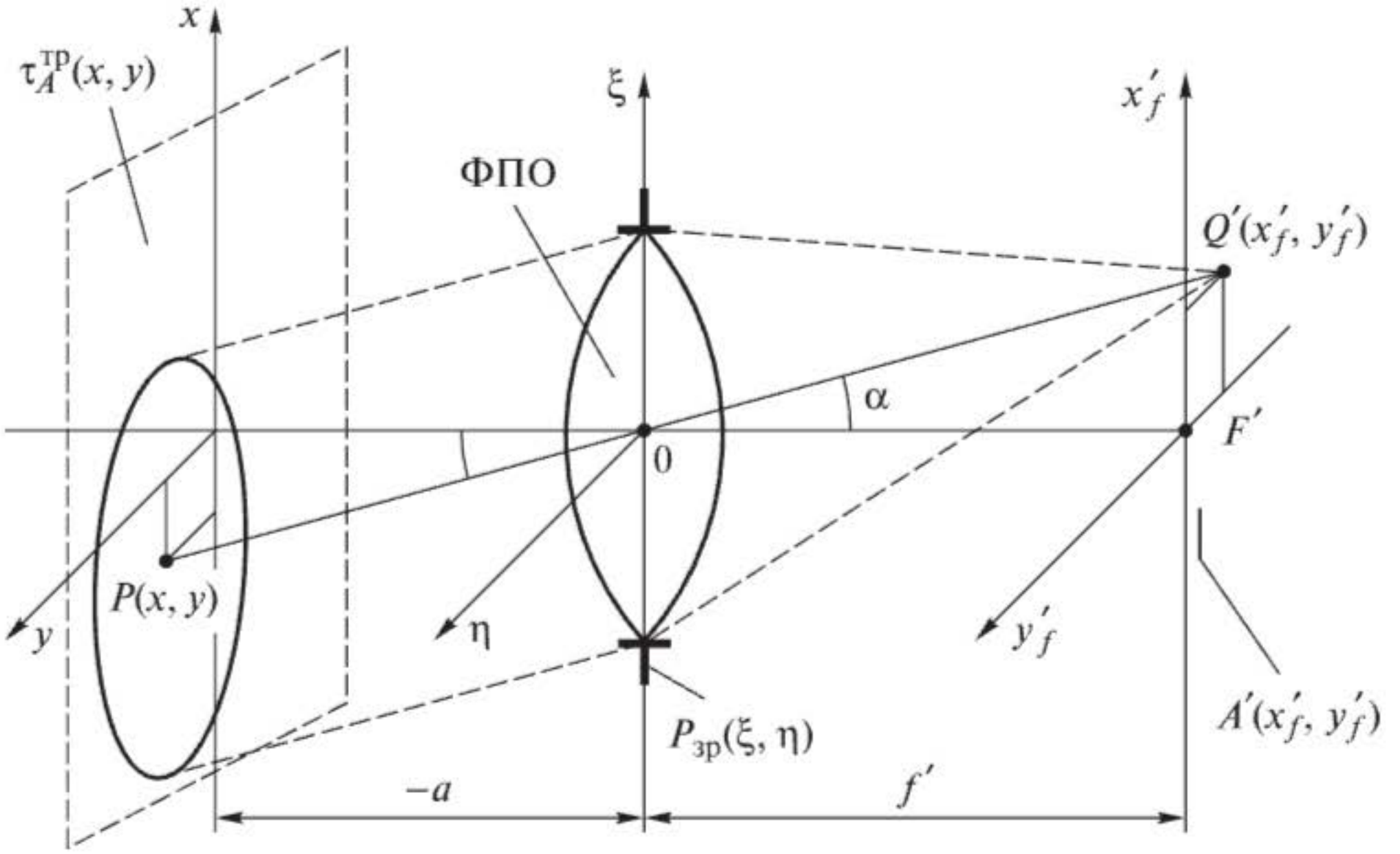


Рис. 6.7. Иллюстрация влияния зрачка на формирование фурье-образа

Таким образом, конечный размер зрачка объектива можно учесть, проецируя зрачок в плоскость транспаранта. Центр проекции располагается на линии, соединяющей точку $\left(x'_f, y'_f\right)$ с центром линзы 0. Из рис. 6.7 следует, что $\frac{x}{a} = \frac{x'_f}{f'}$ и $\frac{y}{-a} = \frac{-y'_f}{f'}$, так что $x = \frac{a}{f'} x'_f$ и $y = \frac{a}{f'} y'_f$. Таким образом, апертура тонкой линзы ограничивает эффективный размер транспаранта, при этом амплитудный коэффициент пропускания той части транспаранта, которая определяет значение комплексной амплитуды $A'\left(x'_f, y'_f\right)$, составит

$$\tau_{\text{эф}}^{\text{тр}}(x, y) = \tau_A^{\text{тр}}(x, y) P_{\text{зр}}\left(x - \frac{a}{f'} x'_f,\ y - \frac{a}{f'} y'_f \right), \qquad (6.50)$$

где $P_{\text{зр}}\left(x - \frac{a}{f'} x'_f, y - \frac{a}{f'} y'_f \right)$ — проекция функции зрачка в плоскости транспаранта. Тогда, подставив в выражение (6.41) вместо $\tilde{\tau}_A^{\text{тр}}(\nu_x, \nu_y)$ функцию $\tilde{\tau}_{\text{эф}}^{\text{тр}}(\nu_x, \nu_y)$, получим

$$A'(x'_f, y'_f) = A'(\lambda f' \nu_x, \lambda f' \nu_y) = \\ = \frac{a_0 \exp\left[i\pi\lambda\left(\nu_x^2 + \nu_y^2\right)(f' + a) \right]}{i\lambda f'} \tilde{\tau}_{\text{эф}}^{\text{тр}}(\nu_x, \nu_y), \qquad (6.51)$$

где

$$\tilde{\tau}_{\text{эф}}^{\text{тр}}(\nu_x, \nu_y) = F_{xy}\left\{ \tau_A^{\text{тр}}(x, y) P_{\text{зр}}\left(x - \frac{a}{f'} x'_f, y - \frac{a}{f'} y'_f \right) \right\}. \qquad (6.52)$$

Из выражения (6.50) следует, что удаление транспаранта от линзы ($-a \neq 0$) приводит к появлению виньетирования, которое отсутствует, когда транспарант расположен вплотную к линзе и размеры транспаранта меньше размеров зрачка линзы.

Транспарант расположен за линзой

Пусть транспарант с комплексным коэффициентом пропускания $\tau_A^{\text{тр}}(x, y)$ расположен за линзой на расстоянии d от задней фокальной плоскости (рис. 6.8), а линза освещается плоской монохроматической волной с амплитудой a_0.

Примем допущение о том, что $f' \gg D_{\text{зр}}$. Тогда при освещении тонкой положительной линзы плоской волной в квадратичном приближении формируется сферическая волна

$$A'_{\text{л}}(\xi, \eta) = a_0 \exp\left[-i \frac{\pi}{\lambda f'} \left(\xi^2 + \eta^2 \right) \right],$$

которая сходится в заднем фокусе объектива F'.

Будем считать, что в промежутке между линзой и транспарантом справедливы условия дифракции в приближении «тени».

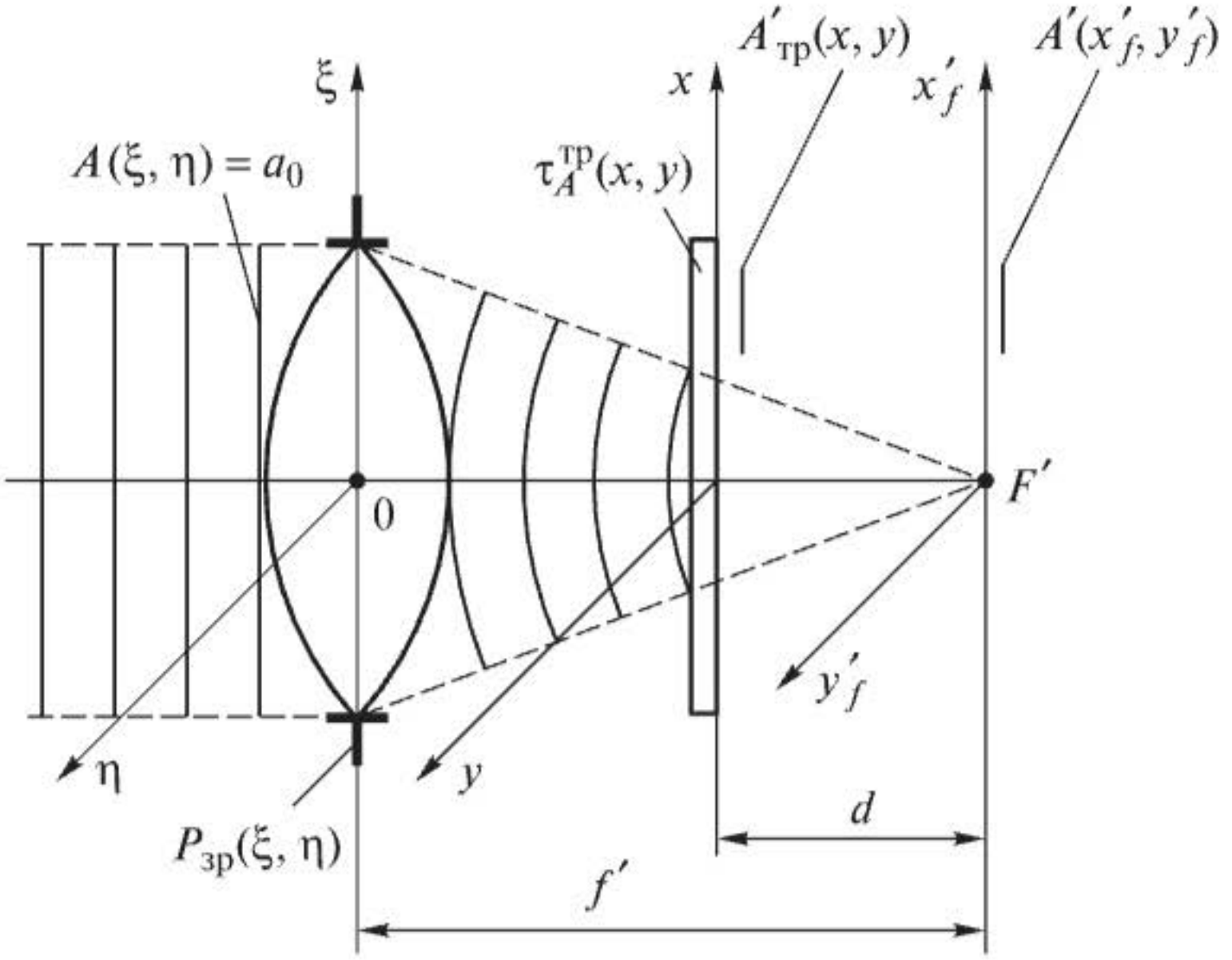


Рис. 6.8. Схема фурье-преобразующей системы при расположении транспаранта между линзой и задней фокальной плоскостью

Тогда комплексная амплитуда волны, освещающей транспарант, определяется выражением

$$A_{\text{тр}}(x, y) = \frac{a_0 f'}{d} \exp\left[ik(f' - d)\right] \exp\left[-i\frac{\pi}{\lambda d}(x^2 + y^2)\right]. \quad (6.53)$$

Здесь множитель $\exp\left[ik(f' - d)\right]$ представляет собой постоянный фазовый набег волны, которым можно пренебречь. Конечный размер освещенной области на транспаранте можно учесть, если ввести эффективную функцию зрачка $P_{\text{эф}}(x, y)$, приведенную к плоскости транспаранта x, y. Из рис. 6.8 следует, что $\xi/f' = x/d$, $\eta/f' = y/d$ и $\xi = x f'/d$, $\eta = y f'/d$. Поэтому можно ввести эффективную функцию зрачка, которая спроецирована в плоскость транспаранта $P_{\text{эф}}(x, y) = P_{\text{зр}}\left(\frac{f'}{d}x, \frac{f'}{d}y\right)$.

Тогда комплексную амплитуду волны на выходе транспаранта можно представить в виде

$$A'_{\text{тр}}(x, y) = \frac{a_0 f'}{d} \exp\left[-i\frac{\pi}{\lambda d}(x^2 + y^2)\right] P_{\text{зр}}\left(\frac{f'}{d}x, \frac{f'}{d}y\right) \tau_A^{\text{тр}}(x, y). \quad (6.54)$$

Считая, что при распространении волны от транспаранта до фокальной плоскости объектива соблюдаются условия дифракции Френеля ($d > z_{\min}$), получаем следующее выражение для комплексной амплитуды волны в фокальной плоскости линзы:

$$A'\left(x'_f, y'_f\right) = \frac{\exp\left[i\frac{\pi}{\lambda d}\left(x'^2_f + y'^2_f\right)\right]}{i\lambda d} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} A'_{\text{тр}}(x, y\ )\exp\left[i\frac{\pi}{\lambda d}\left(x^2 + y^2\right)\right] \times$$

$$\times \exp\left[-i \cdot 2\pi\left(\frac{x'_f}{\lambda d}x + \frac{y'_f}{\lambda d}y\right)\right]dxdy. \qquad (6.55)$$

Подставив (6.54) в (6.55) и введя пространственные частоты $\nu_x = x'_f/\lambda d, \nu_y = y'_f/\lambda d$, получим

$$A'\left(x'_f, y'_f\right) = \frac{a_0 f'}{i\lambda d^2}\exp\left[i\frac{\pi}{\lambda d}\left(x'^2_f + y'^2_f\right)\right] \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} P_{\text{зр}}\left(\frac{f'}{d}x, \frac{f'}{d}y\right)\tau_A^{\text{тр}}(x, y\ )\exp\left[-i \cdot 2\pi\left(\frac{x'_f}{d}x + \frac{y'_f}{d}y\right)\right]dxdy =$$

$$= \frac{a_0 f'}{i\lambda d^2}\exp\left[i\pi\lambda d\left(\nu_x^2 + \nu_y^2\right)\right] F_{xy}\left\{P_{\text{зр}}\left(\frac{f'}{d}x, \frac{f'}{d}y\right)\tau_A^{\text{тр}}(x, y)\right\} =$$

$$= \frac{a_0 f'}{i\lambda d^2}\exp\left[i\pi\lambda d\left(\nu_x^2 + \nu_y^2\right)\right]\tilde{\tau}_{\text{эф}}^{\text{тр}}\left(\nu_x, \nu_y\right), \qquad (6.56)$$

где $\tilde{\tau}_{\text{эф}}^{\text{тр}}\left(\nu_x, \nu_y\right) = F_{xy}\left\{P_{\text{зр}}\left(\frac{f'}{d}x, \frac{f'}{d}y\right)\tau_A^{\text{тр}}(x, y)\right\}$.

Таким образом, с точностью до амплитудно-фазового множителя комплексная амплитуда волны в фокальной плоскости объектива совпадает с фурье-образом комплексного коэффициента пропускания той части транспаранта, которая определяется проекцией выходного зрачка объектива на плоскость транспаранта. Если размер проекции зрачка больше размеров транспаранта, то $\tilde{\tau}_{\text{эф}}^{\text{тр}}\left(\nu_x, \nu_y\right) = \tilde{\tau}_A^{\text{тр}}\left(\nu_x, \nu_y\right)$.

Следует отметить, что изменение значения d приводит к изменению масштаба фурье-образа транспаранта, при увеличении d пространственный масштаб фурье-образа увеличивается, при уменьшении d — уменьшается.

6.2.4. Формирование изображения тонким однолинзовым объективом при когерентном освещении

Из геометрической оптики известно, что при определенном расположении предмета относительно объектива последний формирует его действительное изображение. Используя основные положения скалярной теории дифракции, можно показать, что геометрическое изображение является частным случаем дифракционного распределения поля за объективом при предположении, что длина волны $\lambda \to 0$. Явление дифракции приводит к размытию изображения точек объекта даже в случае отсутствия аберраций у объектива, формирующего изображение.

На рис. 6.9 представлена оптическая схема, в которой объект, расположенный на расстоянии $-a$ от тонкого однолинзового объектива, подсвечивается монохроматической волной. Обозначим комплексную амплитуду волны, возникающую сразу за объектом, функцией $A(x, y)$.

Плоскость $x'0y'$ является плоскостью геометрического изображения и сопряжена с плоскостью предмета. Распределение поля в плоскости $x'0y'$ изображения объекта обозначим $A'(x', y')$, а распределение поля в плоскости наблюдения $x'_н 0 y'_н$, которая

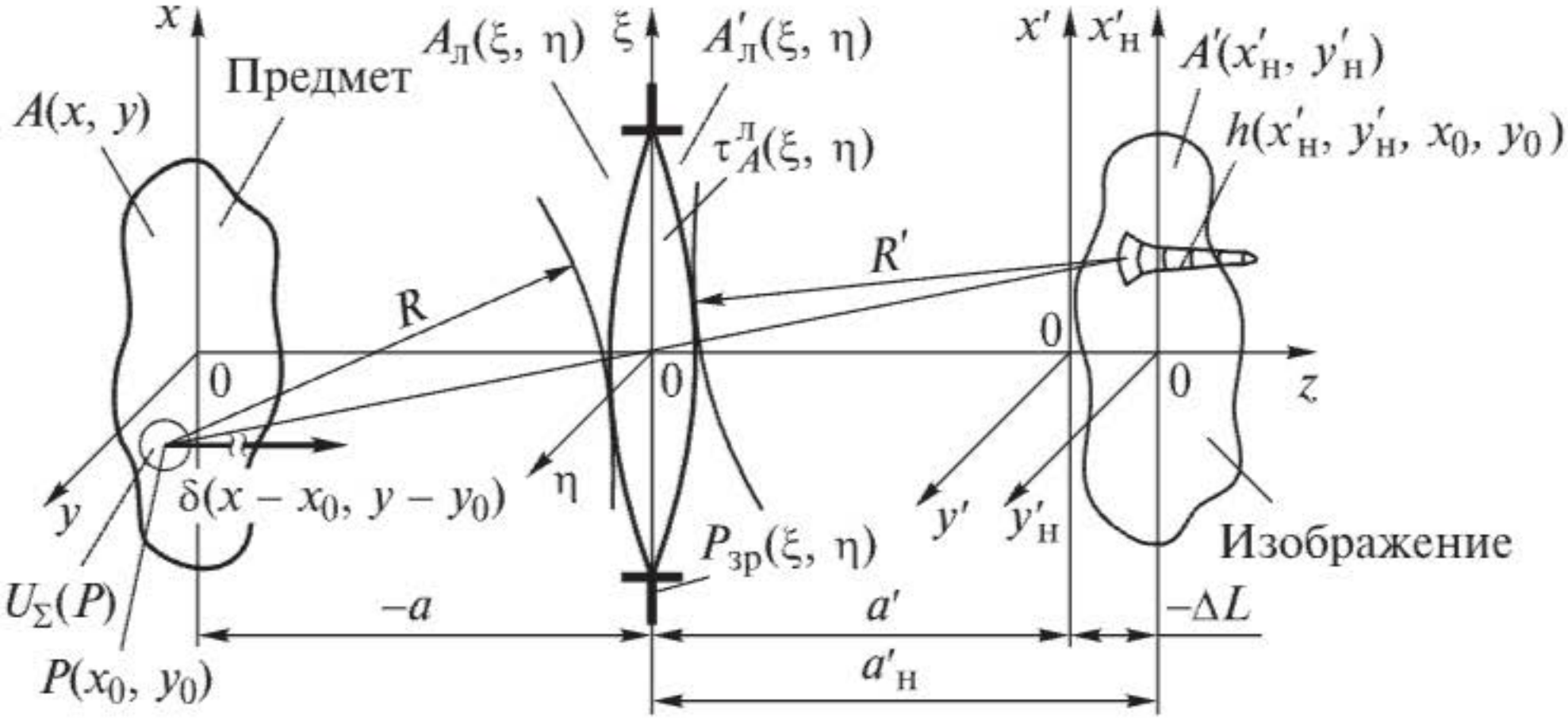


Рис. 6.9. Схема формирования изображения однолинзовым тонким объективом

может не совпадать с плоскостью изображения, как $A'_{\text{н}}(x'_{\text{н}}, y'_{\text{н}})$. Поскольку когерентная оптическая система является линейной по отношению к комплексной амплитуде, распределение комплексной амплитуды в плоскости наблюдения $x'_{\text{н}}0y'_{\text{н}}$ связано с распределением комплексной амплитуды в плоскости объекта интегралом суперпозиции:

$$A'_{\text{н}}(x'_{\text{н}}, y'_{\text{н}}) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} A(x, y)h(x'_{\text{н}}y'_{\text{н}}, x, y)dxdy, \qquad (6.57)$$

где $h(x'_{\text{н}}, y'_{\text{н}}, x, y)$ — когерентная функция рассеяния (КФР), которая является изображением в плоскости $x'_{\text{н}}0y'_{\text{н}}$ точечного источника, расположенного в произвольной точке (x, y). Для того чтобы вычислить распределение комплексной амплитуды в плоскости наблюдения, нужно определить выражение для КФР.

Когерентная функция рассеяния

Будем рассматривать произвольную точку P пространства предметов с координатами x_0 и y_0 как точечный источник излучения с единичной амплитудой, который описывается δ-функцией вида $\delta(x - x_0, y - y_0)$. Тогда в приближении дифракции Френеля распределение комплексной амплитуды волны от этого источника в плоскости входного зрачка

$$A_{\text{л}}(\xi, \eta) =$$

$$= \frac{1}{i\lambda(-a)}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x - x_0, y - y_0)\exp\left\{-i\frac{\pi}{\lambda a}\left[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2\right]\right\}\times$$

$$\times dxdy = \frac{1}{i\lambda(-a)}\exp\left\{-i\frac{\pi}{\lambda a}\left[(\xi - x_0)^2 + (\eta - y_0)^2\right]\right\}. \qquad (6.58)$$

Поскольку точечный источник излучения может находиться в любой точке предмета, координаты x_0 и y_0 можно заменить на x и y. Тогда получим

$$A_{\text{л}}(\xi, \eta) = -\frac{1}{i\lambda a}\exp\left\{-i\frac{\pi}{\lambda a}\left[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2\right]\right\}.$$

После прохождения волны через тонкую линзу с ограниченной апертурой комплексная амплитуда принимает вид

$$A'_{\text{л}}(\xi,\eta)=A_{\text{л}}(\xi,\eta)\tau^{\text{л}}_{A}(\xi,\eta)=$$

$$=-\frac{1}{i\lambda a}\exp\left\{-i\frac{\pi}{\lambda a}\left[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2\right]\right\}\times$$

$$\times P_{\text{зр}}(\xi,\eta)\exp\left[-i\frac{\pi}{\lambda f'}\left(\xi^2+\eta^2\right)\right]. \qquad (6.59)$$

Считая, что при распространении волны от линзы до плоскости $x'_{\text{н}}0y'_{\text{н}}$ наблюдения справедливы приближения дифракции Френеля, для дифракционного изображения точечного источника $h(x'_{\text{н}},y'_{\text{н}},x,y)$ получаем следующее выражение:

$$h(x'_{\text{н}},y'_{\text{н}},x,y)=$$

$$=\frac{1}{i\lambda a'_{\text{н}}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}A'_{\text{л}}(\xi,\eta)\exp\left\{i\frac{\pi}{\lambda a'_{\text{н}}}\left[(x'_{\text{н}}-\xi)^2+(y'_{\text{н}}-\eta)^2\right]\right\}d\xi d\eta=$$

$$=\frac{1}{\lambda^2 a a'_{\text{н}}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}P_{\text{зр}}(\xi,\eta)\exp\left[-i\frac{\pi}{\lambda f'}\left(\xi^2+\eta^2\right)\right]\times$$

$$\times\exp\left\{-i\frac{\pi}{\lambda a}\left[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2\right]\right\}\times$$

$$\times\exp\left\{i\frac{\pi}{\lambda a'_{\text{н}}}\left[(x'_{\text{н}}-\xi)^2+(y'_{\text{н}}-\eta)^2\right]\right\}d\xi d\eta. \qquad (6.60)$$

Проведем алгебраические преобразования в подынтегральном выражении:

$$P_{\text{зр}}(\xi,\eta)\exp\left[-i\frac{\pi}{\lambda f'}\left(\xi^2+\eta^2\right)\right]\exp\left\{-i\frac{\pi}{\lambda a}\left[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2\right]\right\}\times$$

$$\times\exp\left\{i\frac{\pi}{\lambda a'_{\text{н}}}\left[(x'_{\text{н}}-\xi)^2+(y'_{\text{н}}-\eta)^2\right]\right\}=$$

$$=P_{\text{зр}}(\xi,\eta)\exp\left[-i\frac{\pi}{\lambda a}\left(x^2+y^2\right)\right]\exp\left[i\frac{\pi}{\lambda a'_{\text{н}}}\left(x'^2_{\text{н}}+y'^2_{\text{н}}\right)\right]\times$$

$$\times\exp\left[i\frac{\pi}{\lambda}\left(\xi^2+\eta^2\right)\left(\frac{1}{a'_{\text{н}}}-\frac{1}{a}-\frac{1}{f'}\right)\right]\times$$

$$\times\exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda}\left(\left(\frac{x'_{\text{н}}}{a'_{\text{н}}}-\frac{x}{a}\right)\xi+\left(\frac{y'_{\text{н}}}{a'_{\text{н}}}-\frac{y}{a}\right)\eta\right)\right]. \qquad (6.61)$$

Подставив полученное выражение в (6.60), получим

$$h(x'_{\text{н}}, y'_{\text{н}}, x, y) = \frac{1}{\lambda^2 a a'_{\text{н}}} \exp\left[-i\frac{\pi}{\lambda a}\left(x^2 + y^2\right)\right] \exp\left[i\frac{\pi}{\lambda a'_{\text{н}}}\left(x'^2_{\text{н}} + y'^2_{\text{н}}\right)\right] \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} P_{\text{зр}}(\xi, \eta) \exp\left\{i\frac{\pi}{\lambda}\left(\xi^2 + \eta^2\right)\left(\frac{1}{a'_{\text{н}}} - \frac{1}{a} - \frac{1}{f'}\right)\right\} \times$$

$$\times \exp\left\{-i\frac{2\pi}{\lambda}\left[\left(\frac{x'_{\text{н}}}{a'_{\text{н}}} - \frac{x}{a}\right)\xi + \left(\frac{y'_{\text{н}}}{a'_{\text{н}}} - \frac{y}{a}\right)\eta\right]\right\} d\xi d\eta. \qquad (6.62)$$

Рассмотрим формулу $\left(\frac{1}{a'_{\text{н}}} - \frac{1}{a} - \frac{1}{f'}\right)$, входящую в выражение (6.62). Поскольку плоскости $x0y$ и $x'_{\text{н}}0y'_{\text{н}}$ не являются сопряженными, то с учетом формулы тонкой линзы $\frac{1}{a'} - \frac{1}{a} = \frac{1}{f'}$ можно записать

$$\frac{1}{a' - \Delta L} - \frac{1}{a} - \frac{1}{f'} = \vartheta \neq 0, \qquad (6.63)$$

где $a'_{\text{н}} = a' - \Delta$ (см. рис. 6.9).

Определим значение ϑ. Так как

$$\frac{1}{a' - \Delta L} = \vartheta + \frac{1}{a} + \frac{1}{f'} = \vartheta + \frac{1}{a'},$$

то

$$\vartheta = \frac{1}{a' - \Delta L} - \frac{1}{a'} = \frac{a' - a' + \Delta L}{a'(a' - \Delta L)} = \frac{\Delta L}{a'(a' - \Delta L)}. \qquad (6.64)$$

Поскольку $|\Delta L| \ll a'$, то в знаменателе выражения (6.64) величиной ΔL можно пренебречь и считать, что $\vartheta \approx \Delta L / a'^2$. Тогда выражение (6.62) преобразуется к виду

$$h(x'_{\text{н}}, y'_{\text{н}}, x, y) = \frac{1}{\lambda^2 a a'_{\text{н}}} \exp\left[-i\frac{\pi}{\lambda a}\left(x^2 + y^2\right)\right] \times$$

$$\times \exp\left[i\frac{\pi}{\lambda a'_{\text{н}}}\left(x'^2_{\text{н}} + y'^2_{\text{н}}\right)\right] \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} P_{\text{зр}}(\xi, \eta) \exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\Delta L}{2a'^2}\left(\xi^2 + \eta^2\right)\right] \times$$

$$\times \exp\left\{-i2\pi\left[\left(\frac{x'_{\text{н}}}{a'_{\text{н}}} - \frac{x}{a}\right)\frac{\xi}{\lambda} + \left(\frac{y'_{\text{н}}}{a'_{\text{н}}} - \frac{y}{a}\right)\frac{\eta}{\lambda}\right]\right\} d\xi d\eta. \qquad (6.65)$$

При малых значениях дефокусировки, когда $|\Delta L| \ll a'$, можно в выражении (6.65) принять, что $x'_{\text{н}} \approx x'$, $y'_{\text{н}} \approx y'$, $a'_{\text{н}} \approx a'$. Это означает, что мы рассматриваем плоскость наблюдения как плоскость изображения, но при наличии у тонкого однолинзового объектива волновой аберрации дефокусировки, определяемой выражением

$$\Delta l(\xi, \eta) = \frac{\Delta L}{2a'^2}\left(\xi^2 + \eta^2\right) \approx \frac{\Delta L}{2a'^2_{\text{н}}}\left(\xi^2 + \eta^2\right).$$

С учетом принятого допущения получим выражение импульсного отклика, определенного для плоскости $x'0y'$ изображения объектива, имеющего аберрацию дефокусировки, в следующем виде:

$$h(x', y', x, y) = \frac{1}{\lambda^2 a a'}\exp\left[-i\frac{\pi}{\lambda a}\left(x^2 + y^2\right)\right]\times$$

$$\times\exp\left[i\frac{\pi}{\lambda a'}\left(x'^2 + y'^2\right)\right]\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} P_{\text{зр}}(\xi, \eta)\exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda}\Delta l(\xi, \eta)\right]\times$$

$$\times\exp\left\{-i\cdot 2\pi\left[(x' - \beta x)\frac{\xi}{\lambda a'} + (y' - \beta y)\frac{\eta}{\lambda a'}\right]\right\} d\xi d\eta. \qquad (6.66)$$

Если в выражении (6.66) сделать замену переменных, выразив координаты ξ и η в плоскости зрачка через пространственные частоты, т. е. $\nu_x = \frac{\xi}{\lambda a'}$, $\nu_y = \frac{\eta}{\lambda a'}$, то получим

$$h(x', y', x, y) = \beta\exp\left[-i\frac{\pi}{\lambda a}\left(x^2 + y^2\right)\right]\exp\left[i\frac{\pi}{\lambda a'}\left(x'^2 + y'^2\right)\right]\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} P_{\text{зр}}\left(\lambda a'\nu_x, \lambda a'\nu_y\right)\exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda}\Delta l\left(\nu_x, \nu_y\right)\right]\times \qquad (6.67)$$

$$\times\exp\left\{-i\cdot 2\pi\left[(x' - \beta x)\nu_x + (y' - \beta y)\nu_y\right]\right\} d\nu_x d\nu_y,$$

где $\Delta l\left(\nu_x, \nu_y\right) = \frac{\Delta L\lambda^2}{2}\left(\nu_x^2 + \nu_y^2\right)$ — волновая аберрация продольной дефокусировки, выраженная через пространственные частоты; $\beta = a'/a$ — линейное увеличение ОС.

Если продольная дефокусировка отсутствует, т. е. $\Delta l(\xi, \eta) = 0$, то выражение (6.67) принимает следующий вид:

$$h(x', y', x, y) =$$

$$= \beta \exp\left[-i\frac{\pi}{\lambda a}\left(x^2 + y^2\right)\right]\exp\left[i\frac{\pi}{\lambda a'}\left(x'^2 + y'^2\right)\right]\times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} P_{\text{зр}}\left(\lambda a'\nu_x, \lambda a'\nu_y\right)\exp\left\{-i\cdot 2\pi\left[\left(x' - \beta x\right)\nu_x + \left(y' - \beta y\right)\nu_y\right]\right\}\times$$

$$\times d\nu_x d\nu_y. \qquad (6.68)$$

Следовательно, КФР с точностью до множителей $\exp\left[-i\frac{\pi}{\lambda a}\left(x^2 + y^2\right)\right]$ и $\exp\left[i\frac{\pi}{\lambda a'}\left(x'^2 + y'^2\right)\right]$ определяется двумерным преобразованием Фурье от функции зрачка. Рассмотрим возможность исключения этих множителей.

Обычно на практике конечной целью формирования изображения является регистрация интенсивности (освещенности) с помощью квадратичного детектора (глаза, фотоэлектрического приемника излучения, фотопленки и т. д.). Множитель $\exp\left[i\frac{\pi}{\lambda a'}\left(x'^2 + y'^2\right)\right]$ учитывает только фазовое искажение и не влияет на распределение интенсивности в плоскости изображения, поэтому его можно не рассматривать, так как $\left|\exp\left[i\frac{\pi}{\lambda a'}\left(x'^2 + y'^2\right)\right]\right|^2 = 1$. Второй множитель $\exp\left[-i\frac{\pi}{\lambda a}\left(x^2 + y^2\right)\right]$ входит в интеграл суперпозиции (6.57), поэтому для обоснования его исключения нужны более жесткие ограничения. Если ОС дает высококачественное изображение (в данном случае дифракционное), распределение комплексной амплитуды волны $A'(x', y')$ в плоскости изображения с точностью до масштабного множителя должно повторять распределение комплексной амплитуды в предметной плоскости, и в этом случае КФР имеет δ-образный вид. Тогда амплитуда волны $A'(x', y')$ в фиксированной точке $Q(x', y')$ определяется только полем, заданным внутри малой окрестности сопряженной точки $P(x, y$ в плоскости объекта. В пределах этой окрестности значение фазового множителя приближенно можно

считать постоянным и равным значению в точке P. Значение фазового множителя в окрестности точки P можно получить, сделав замену $x = x'/\beta$, $y = y'/\beta$, тогда

$$\exp\left[-i\frac{\pi}{\lambda a}\left(x^2 + y^2\right)\right] \approx \exp\left[-i\frac{\pi}{\lambda a\beta^2}\left(x'^2 + y'^2\right)\right]. \qquad (6.69)$$

Множитель (6.69) зависит от переменных x' и y', и его можно исключить из рассмотрения на тех же основаниях, что и первый множитель. С учетом изложенного получим

$$h(x', y', x, y) = h_\beta(x' - \beta x, y' - \beta y) = \beta\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} P_{\text{зр}}(\lambda a'\nu_x, \lambda a'\nu_y)\times$$

$$\times\exp\left\{-2\pi\left[(x' - \beta x)\nu_x + (y' - \beta y)\nu_y\right]\right\} d\nu_x d\nu_y. \qquad (6.70)$$

Из выражения (6.70) следует, что КФР зависит лишь от разности координат, поэтому когерентная оптическая система ***пространственно-инвариантна*** по отношению к комплексным амплитудам. При $x = 0$ и $y = 0$ КФР имеет вид

$$h_\beta(x', y') =$$

$$= \beta\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} P_{\text{зр}}(\lambda a'\nu_x, \lambda a'\nu_y)\exp\left[-i\cdot 2\pi\left(x'\nu_x + y'\nu_y\right)\right] d\nu_x d\nu_y =$$

$$= \beta F_{\nu_x\nu_y}\left\{P_{\text{зр}}(\lambda a'\nu_x, \lambda a'\nu_y)\right\}. \qquad (6.71)$$

Функцию $h(x', y') = \frac{1}{\beta}h_\beta(x', y') = F_{\nu_x\nu_y}\left\{P_{\text{зр}}(\lambda a'\nu_x, \lambda a'\nu_y)\right\}$ будем называть ***приведенной КФР***.

Связь комплексных амплитуд предмета и изображения

В общем виде распределение комплексной амплитуды $A'(x', y')$ в плоскости изображения можно найти, если в интеграл суперпозиции (6.57) подставить КФР $h(x', y', x, y) = h_\beta(x' - \beta x, y' - \beta y)$. Тогда получим

$$A'(x', y') = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} A(x, y)h_\beta(x' - \beta x, y' - \beta y)dxdy. \qquad (6.72)$$

Покажем, что при условии $\lambda \to 0$ безаберрационная тонкая линза формирует идеальное изображение, предсказываемое геометрической оптикой. Для этого определим вид КФР $h_{\text{г}}(x' - \beta x, y' - \beta y)$ в приближении геометрической оптики, устремив к нулю длину волны λ в формуле (6.70). При стремлении λ к нулю область значений пространственных частот, где функция зрачка $P_{\text{зр}}(\lambda a' \nu_x, \lambda a' \nu_y) = 1$, будет неограниченно возрастать, что позволяет заменить функцию зрачка единицей с бесконечными пределами интегрирования. Тогда формула (6.70) преобразуется к виду

$$h_{\text{г}}(x' - \beta x, y' - \beta y) =$$

$$= \beta \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-i \cdot 2\pi\left[(x' - \beta x)\nu_x + (y' - \beta y)\nu_y\right]\right\} d\nu_x d\nu_y =$$

$$= \beta \delta(x' - \beta x, y' - \beta y) = \frac{1}{\beta} \delta\left(\frac{x'}{\beta} - x, \frac{y'}{\beta} - y\right). \qquad (6.73)$$

Отметим, что при выводе формулы (6.73) использовано интегральное представление δ-функции Дирака и теорема масштабов. Подставив (6.73) в интеграл суперпозиции (6.72), получим

$$A'_{\text{г}}(x', y') = \frac{1}{\beta} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(x, y) \delta\left(\frac{x'}{\beta} - x, \frac{y'}{\beta} - y\right) dx dy = \frac{1}{\beta} A\left(\frac{x'}{\beta}, \frac{y'}{\beta}\right). \qquad (6.74)$$

Отсюда следует, что изображение, получаемое в приближении геометрической оптики, представляет собой с точностью до масштаба точную копию предмета. Если $\lambda \neq 0$, то приближения геометрической оптики несправедливы. Используя замену переменных $u = \beta x$, $v = \beta y$, преобразуем выражение (6.72) к следующему виду:

$$A'(x', y') = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(x, y) h_{\beta}(x' - \beta x, y' - \beta y) dx dy =$$

$$= \frac{1}{\beta^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A\left(\frac{u}{\beta}, \frac{v}{\beta}\right) h_{\beta}(x' - u, y' - v) du dv =$$

$$= \frac{1}{\beta} A\left(\frac{x'}{\beta}, \frac{y'}{\beta}\right) \otimes \frac{1}{\beta} h_{\beta}(x', y'). \qquad (6.75)$$

Вводя обозначения $A'_{\text{г}}(x', y') = \frac{1}{\beta} A\left(\frac{x'}{\beta}, \frac{y'}{\beta}\right)$ и $h(x', y') = \frac{1}{\beta} h_{\beta}(x', y')$, запишем

$$A'(x', y') = A'_{\text{г}}(x', y') \otimes h(x', y'). \tag{6.76}$$

Таким образом, связь между предметом и изображением выражается в виде свертки идеального геометрического изображения $A'_{\text{г}}(x', y')$ и приведенной КФР. Зависимость (6.76) показывает, что при учете дифракционных эффектов изображение представляет собой результат фильтрации геометрического изображения линейным пространственным фильтром с импульсным откликом $h(x', y')$. Такое преобразование приводит к линейным искажениям, из-за которых происходит сглаживание геометрического изображения и понижение контраста мелких деталей предмета.

6.2.5. Формирование изображения однолинзовым объективом при некогерентном излучении объектов

При некогерентном излучении ОС линейна по отношению к интенсивности. Поэтому импульсный отклик некогерентной ОС — некогерентная функция рассеяния (НКФР) — определяется как $H_{\beta}(x', y', x, y) = \left|h_{\beta}(x', y', x, y)\right|^2$.

Для пространственно-инвариантной ОС НКФР имеет вид

$$H_{\beta}(x' - \beta x, y' - \beta y) = \left|h_{\beta}(x' - \beta x, y' - \beta y)\right|^2. \tag{6.77}$$

Приведенная НКФР

$$H(x' - \beta x, y' - \beta y) = \frac{1}{\beta^2} H_{\beta}(x' - \beta x, y' - \beta y) =$$

$$= \left|h(x' - \beta x, y' - \beta y)\right|^2. \tag{6.78}$$

Для пространственно-неинвариантной ОС распределение интенсивности излучения в плоскости изображения описывается интегралом суперпозиции

$$I'(x', y') = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} I(x, y) H_\beta(x', y', x, y)dxdy, \qquad (6.79)$$

где $I(x, y\ )$ — распределение интенсивности излучения в плоскости объекта.

Для пространственно-инвариантной ОС распределение интенсивности описывается интегралом свертки, который может быть представлен следующим выражением:

$$I'(x', y') = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} I(x, y) H_\beta(x' - \beta x, y' - \beta y)dxdy = \begin{vmatrix}\beta x = u\\ \beta y = \nu\end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\beta^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} I\left(\frac{u}{\beta}, \frac{v}{\beta}\right) H_\beta(x' - u, y' - v)dudv =$$

$$= \frac{1}{\beta^2} I\left(\frac{x'}{\beta}, \frac{y'}{\beta}\right) \otimes H_\beta(x', y') = I'_\text{г}(x', y') \otimes H(x', y'), \qquad (6.80)$$

где $I'_\text{г}(x', y') = I\left(\frac{x'}{\beta}, \frac{y'}{\beta}\right)$ — геометрическое (идеальное) изображение объекта при некогерентном освещении.

Отметим, что некогерентное излучение, в отличие от когерентного, не является монохроматическим, а НКФР зависит от длины волны как от параметра. Поэтому распределение интенсивности следовало бы представлять функцией, которая зависит не только от пространственных координат, но и от длины волны, а именно $I_\lambda(\lambda, x, y)$.

В дальнейшем для упрощения записи формул при некогерентном излучении будем оперировать функцией $I_\lambda(x, y\ )$, которая описывает квазимонохроматическое излучение и определяется соотношением

$$I_\lambda(x, y\ ) \neq I_\lambda\ \lambda(\ x\ \ y)\Delta\lambda,$$

где $\Delta\lambda$ — достаточно узкий по сравнению со значением длины волны спектральный интервал.

Кроме того, там, где важно учитывать зависимость НКФР от длины волны, будем использовать обозначение $H(x', y';\ \ )\lambda$.

6.3. Преобразование оптического сигнала реальной оптической системой

6.3.1. Обобщенная модель оптической изображающей системы

В отличие от идеальной реальная ОС имеет ограниченный световой диаметр, обладает аберрациями и может состоять из различных линзовых компонентов и зеркал. На рис. 6.10 приведена обобщенная схема формирования изображения реальной ОС, которая имеет существенные отличия от тонкого дифракционно-ограниченного объектива.

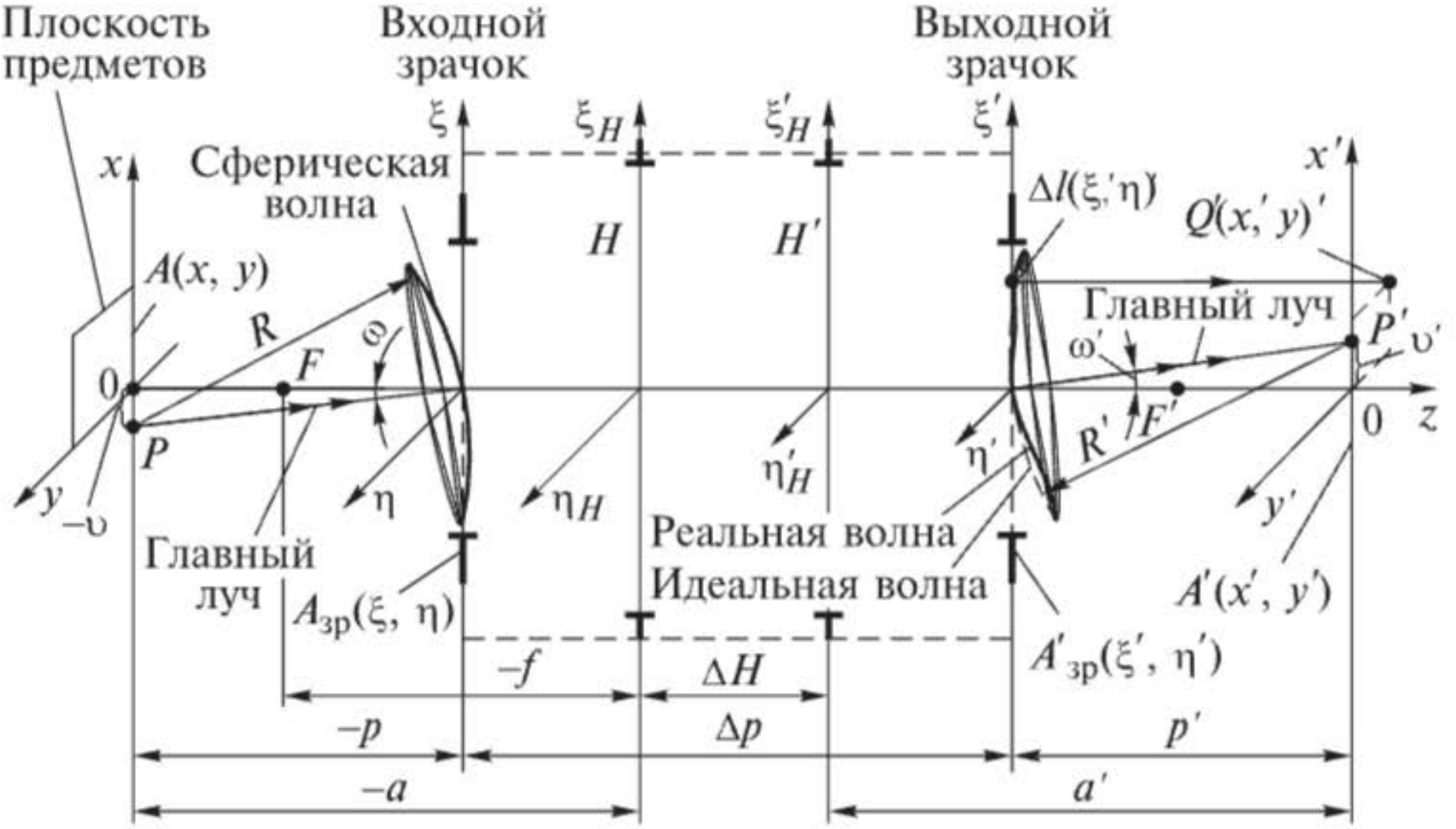


Рис. 6.10. Обобщенная схема реальной ОС

Переход к модельному описанию реальной ОС заключается в замене объектива как некоторой сложной совокупности линз и зеркал оптическим блоком, осуществляющим преобразование входного воздействия в выходное. Входным воздействием при таком описании является комплексная амплитуда волны $A_{зр}(\xi, \eta)$ в плоскости входного зрачка, а выходным воздействием — комплексная амплитуда волны $A'_{зр}(\xi', \eta')$ в плоскости выходного зрачка, которая при заданном входном воздействии определяется преобразующими свойствами оптического блока.

Входной зрачок представляет собой отверстие конечных размеров (апертурная диафрагма или ее изображение в пространстве предметов), через которое излучение поступает в оптическую си-

стему и далее попадает на оптические элементы, формирующие изображение. Выходной зрачок (апертурная диафрагма или ее изображение в пространстве изображений) также имеет вид отверстия конечных размеров, через которое оптическое излучение, после его преобразования оптическими элементами, попадает в плоскость изображения. При построении модели будем считать, что распространение оптического излучения от плоскости входного зрачка до плоскости выходного зрачка с достаточной степенью точности описывается в рамках геометрической оптики. При этом дифракционные эффекты, которые могут возникать на оправах оптических компонентов, не учитываются. Дифракция учитывается при распространении волнового фронта от плоскости предмета до плоскости входного зрачка и от выходного зрачка до плоскости изображения. Рассмотрим только такие ОС, которые формируют действительные изображения.

Если объектив рассчитан таким образом, что оптические пути для всех лучей, которые выходят из точки P пространства предметов, проходят через объектив и приходят в точку P' пространства изображений, остаются одинаковыми, то волна в выходном зрачке представляет собой сферу радиусом R' с центром в точке P' (идеальный волновой фронт). В этом случае объектив является безаберрационным. В действительности волновой фронт от точечного источника в плоскости выходного зрачка значительно отличается от сферической формы, что обусловлено наличием аберраций ОС.

Оптическая система, в которой отсутствуют и аберрации, и дифракционные эффекты, называется идеальной оптической системой (ИОС). Оптическая система, в которой нет аберраций, но учитываются дифракционные эффекты, называется дифракционно-ограниченной оптической системой (ДОС). Оптическую систему, в которой учитываются аберрации и дифракционные эффекты, будем называть реальной оптической системой (РОС).

6.3.2. Формирование изображения реальной оптической системой при когерентном излучении

Если освещение предмета таково, что изменения комплексной амплитуды во всех его точках происходит одновременно, то абсолютные фазы поля в двух произвольных точках будут изменяться одновременно, а их относительная разность фаз будет постоянной. Такое освещение называют ***пространственно когерентным***

(далее — когерентное). Как отмечалось выше, при когерентном излучении от предмета комплексная амплитуда в плоскости изображения связана с распределением комплексной амплитуды в плоскости объекта интегралом суперпозиции.

Когерентная функция рассеяния реальной оптической системы

Для того чтобы вывести выражение для функции рассеяния, рассмотрим последовательно распространение волны от точечного источника излучения через плоскости входного и выходного зрачков до плоскости изображения. Пусть в точке с координатами x_0, y_0 плоскости предмета расположен точечный источник с комплексной амплитудой $A(x, y) = \delta(x - x_0, y - y_0)$. Комплексная амплитуда волны в плоскости входного зрачка, который отстоит от плоскости предмета на расстояние $-p$, может быть определена с помощью дифракционного интеграла Френеля:

$$A_{\text{зр}}(\xi, \eta) = \frac{1}{i\lambda(-p)} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0, y - y_0) \exp\left\{ i \frac{\pi}{\lambda(-p)} \left[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 \right] \right\} dx dy =$$

$$= \frac{1}{i\lambda(-p)} \exp\left\{ i \frac{\pi}{\lambda(-p)} \left[(\xi - x_0)^2 + (\eta - y_0)^2 \right] \right\}. \qquad (6.81)$$

Поскольку точечный источник может находиться в любой точке плоскости предметов с любыми координатами, координаты x_0 и y_0 можно заменить на x и y и записать

$$A_{\text{зр}}(\xi, \eta) = \frac{1}{i\lambda(-p)} \exp\left\{ i \frac{1}{\lambda(-p)} \left[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 \right] \right\}. \qquad (6.82)$$

Выражение (6.82) описывает сферическую волну в квадратичном приближении с центром в точке с координатами x и y. Преобразование волны при ее распространении от входного зрачка до выходного определяется по законам геометрической оптики. Будем считать, что ограничение волны происходит в плоскости выходного зрачка.

Запишем с учетом правила знаков, используемого в геометрической оптике, комплексную амплитуду волны в плоскости входного зрачка в следующем виде:

$$A_{\text{зр}}(\xi, \eta) = \frac{1}{i\lambda(-p)}\exp\left[-i\frac{1}{\lambda(-p)}\left(\xi^2 + \eta^2\right)\right]\times$$

$$\times\exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{x}{p}\xi + \frac{y}{p}\eta\right)\right]\exp\left[-i\frac{\pi}{\lambda p}\left(x^2 + y^2\right)\right], \qquad (6.83)$$

где $\frac{1}{i\lambda(-p)}\exp\left[-i\frac{1}{\lambda p}\left(\xi^2 + \eta^2\right)\right] = A_{\text{сф}}(\xi, \eta)$ — расходящаяся сферическая волна в квадратичном приближении с центром на оптической оси; $\exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{x}{p}\xi + \frac{y}{p}\eta\right)\right] = A_{\text{пл}}(\xi, \eta)$ — плоская единичная волна, входящая во входной зрачок под углами $\operatorname{tg}\theta_x = x/p \approx \theta_x$ и $\operatorname{tg}\theta_y = y/p \approx \theta_y$; $\exp\left[-i\frac{\pi}{\lambda p}\left(x^2 + y^2\right)\right]$ — фазовое искажение волны, пропорциональное квадрату координат, определяющих положение точечного источника в плоскости предметов.

Рассмотрим отдельно прохождение сферической и плоской волн от входного до выходного зрачка.

Распространение сферической волны от входного до выходного зрачка приведено на рис. 6.11.

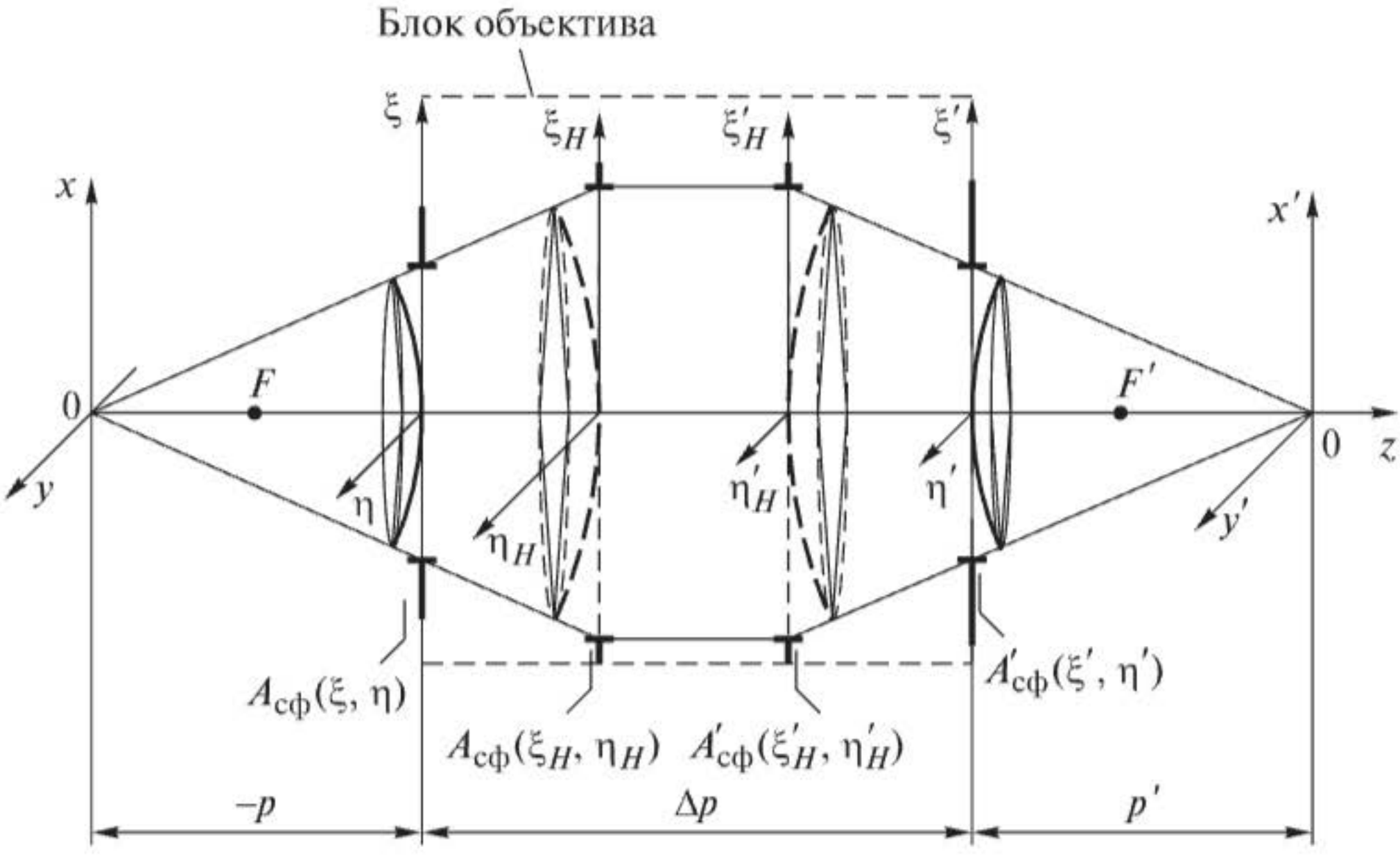


Рис. 6.11. Преобразование сферической волны оптическим блоком

Без учета постоянного набега фазы комплексная амплитуда волны в главной плоскости $\xi_H 0 \eta_H$ и до плоскости $\xi'_H 0 \eta'_H$

$$A_{\text{сф}}(\xi_H, \eta_H) = A_{\text{сф}}(\xi'_H, \eta'_H) = \frac{1}{i\lambda(-a)} \exp\left[-i\frac{\pi}{\lambda a}\left(\xi'^2_H + \eta'^2_H\right)\right]. \quad (6.84)$$

Поскольку увеличение ОС в главных плоскостях равно единице, то волна распространяется между плоскостями H и H', не изменяя своих амплитуды и радиуса. Сразу за главной плоскостью H' волна из расходящейся превращается в сходящуюся сферическую волну с радиусом a'. Комплексная амплитуда за плоскостью $\xi'_H 0 \eta'_H$ описывается выражением

$$A'_{\text{сф}}(\xi'_H, \eta'_H) =$$

$$= \frac{1}{i\lambda(-a)} \exp\left[-i\frac{\pi}{\lambda a}\left(\xi'^2_H + \eta'^2_H\right)\right] \exp\left[-i\frac{\pi}{\lambda f'}\left(\xi'^2_H + \eta'^2_H\right)\right] =$$

$$= -\frac{\beta}{i\lambda a'} \exp\left[-i\frac{\pi}{\lambda a'}\left(\xi'^2_H + \eta'^2_H\right)\right], \quad (6.85)$$

где $\beta = \dfrac{a'}{a}$ — линейное увеличение оптической системы; f' — фокусное расстояние объектива; $\exp\left[-i\dfrac{\pi}{\lambda f'}\left(\xi'^2_H + \eta'^2_H\right)\right] = \tau_{\varphi}^{\text{ИОС}}(\xi'_H, \eta'_H)$ — фазовый коэффициент пропускания ИОС.

Комплексная амплитуда сферической волны в плоскости выходного зрачка имеет вид

$$A'_{\text{сф}}(\xi', \eta') = -\frac{\beta}{i\lambda p'} \exp\left[-i\frac{\pi}{\lambda p'}\left(\xi'^2 + \eta'^2\right)\right]. \quad (6.86)$$

Выражение (6.86) описывает сходящуюся сферическую волну в квадратичном приближении с центром на оптической оси.

Наклонная плоская волна, входящая во входной зрачок под углами $\theta_x = x/p$ и $\theta_y = y/p$, вследствие углового увеличения $\gamma_{\text{зр}} = 1/\beta_{\text{зр}}$ в зрачках трансформируется в выходном зрачке в плоскую волну, выходящую под углами

$$\theta'_x = \frac{\beta x}{p'} = \frac{x\beta}{p\beta\beta_{\text{зр}}} = \frac{\theta_x}{\beta_{\text{зр}}}; \quad \theta'_y = \frac{|\beta| y}{p'} = \frac{\beta y}{p\beta\beta_{\text{зр}}} = \frac{\theta_y}{\beta_{\text{зр}}}, \quad (6.87)$$

где $p' = p\beta\beta_{\text{зр}}$.

Комплексную амплитуду плоской волны в выходном зрачке можно записать в следующем виде:

$$A'_{\text{пл}}(\xi', \eta') = \exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda}\left(\theta'_x\xi' + \theta'_y\eta'\right)\right] = \exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{\beta x}{p'}\xi' + \frac{\beta y}{p'}\eta'\right)\right]. \quad (6.88)$$

Поскольку путь для каждого луча, который выходит из точки P (см. рис. 6.10) и приходит в сопряженную точку P', не остается одинаковым, то возникают монохроматические аберрации: в выходном зрачке волновые аберрации, в плоскости изображения — поперечные геометрические аберрации. Аберрации оптического блока приводят к тому, что волновой фронт в выходном зрачке отличается от идеальной сферы на величину суммарной волновой аберрации. С учетом волновой аберрации и конечных размеров выходного зрачка комплексная амплитуда волны в выходном зрачке описывается выражением

$$A'_{\text{зр}}(\xi', \eta') =$$

$$= -\frac{\beta}{i\lambda p'} P_{\text{зр}}(\xi', \eta')\exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda}\Delta l(\xi', \eta'; \vartheta')\right]\exp\left[-i\frac{\pi}{\lambda p'}\left(\xi'^2 + \eta'^2\right)\right]\times$$

$$\times\exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{\beta x}{p'}\xi' + \frac{\beta y}{p'}\eta'\right)\right]\exp\left[-i\frac{\pi}{\lambda p}\left(x^2 + y^2\right)\right] =$$

$$= -\frac{\beta}{i\lambda p'} P^{\text{аб}}_{\text{зр}}(\xi', \eta'; \vartheta')\exp\left[-i\frac{\pi}{\lambda p'}\left(\xi'^2 + \eta'^2\right)\right]\times$$

$$\times\exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{\beta x}{p'}\xi' + \frac{\beta y}{p'}\eta'\right)\right]\exp\left[-i\frac{\pi\beta_{\text{зр}}}{\lambda p'\beta}\left((\beta x)^2 + (\beta y)^2\right)\right], \quad (6.89)$$

где $P_{\text{зр}}(\xi', \eta')\exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda}\Delta l(\xi', \eta'; \vartheta')\right] = P^{\text{аб}}_{\text{зр}}(\xi', \eta'; \vartheta')$ — аберрационная функция зрачка; $\Delta l(\xi', \eta'; \vartheta')$ — суммарная волновая аберрация, ϑ' — расстояние от оптической оси до точки P'.

Введем вместо оптического блока (см. рис. 6.10) его транспарантную модель. Это означает, что плоскости входного и выходного зрачков совпадают. В этом случае поведение оптического блока как преобразующего элемента описывается с помощью комплексного коэффициента пропускания РОС

$$\tau_A^{\text{РОС}}(\xi', \eta'; \vartheta') = A'_{\text{зр}}(\xi', \eta'; \vartheta') / A_{\text{зр}}(\xi', \eta'). \qquad (6.90)$$

Следует отметить, что при совмещении зрачков в транспарантной модели $\xi' = \xi$ и $\eta' = \eta$. Подставив выражения (6.83) и (6.89) в (6.90), получим

$$\tau_A^{\text{РОС}}(\xi', \eta'; \vartheta') =$$

$$= \left\{ -\frac{\beta}{i\lambda p'} P_{\text{зр}}(\xi', \eta') \exp\left[i \frac{2\pi}{\lambda} \Delta l(\xi', \eta'; \vartheta') \right] \exp\left[-i \frac{\pi}{\lambda p'} \left(\xi'^2 + \eta'^2 \right) \right] \times \right.$$

$$\times \exp\left[i \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{\beta x}{p'} \xi' + \frac{\beta y}{p'} \eta' \right) \right] \exp\left[-i \frac{\pi}{\lambda p} \left(x^2 + y^2 \right) \right] \Big\} \times$$

$$\times \left\{ -\frac{1}{i\lambda p} \exp\left[-i \frac{\pi}{\lambda p} \left(\xi'^2 + \eta'^2 \right) \right] \times \right.$$

$$\left. \times \exp\left[i \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{x}{p} \xi' + \frac{y}{p} \eta' \right) \right] \exp\left[-i \frac{\pi}{\lambda p} \left(x^2 + y^2 \right) \right] \right\}^{-1} =$$

$$= \frac{1}{\beta_{\text{зр}}} P_{\text{зр}}(\xi', \eta') \exp\left[i \frac{2\pi}{\lambda} \Delta l(\xi', \eta'; \vartheta') \right] \exp\left[-i \frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} \right) \left(\xi'^2 + \eta'^2 \right) \right] \times$$

$$\times \exp\left[i \frac{2\pi}{\lambda} \left(\left(\frac{\beta x}{p'} - \frac{x}{p} \right) \xi' + \left(\frac{\beta y}{p'} - \frac{y}{p} \right) \eta' \right) \right]. \qquad (6.91)$$

Проведем преобразования аргументов второй и третьей экспонент в выражении (6.91):

$$\exp\left[-i \frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} \right) \left(\xi'^2 + \eta'^2 \right) \right] =$$

$$= \exp\left[-i \frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{p'} - \frac{\beta\beta_{\text{зр}}}{p'} \right) \left(\xi'^2 + \eta'^2 \right) \right] =$$

$$= \exp\left[-i \frac{\pi(1 - \beta\beta_{\text{зр}})}{\lambda p'} \left(\xi'^2 + \eta'^2 \right) \right]; \qquad (6.92)$$

$$\exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda}\left(\left(\frac{\beta x}{p'}-\frac{x}{p}\right)\xi'+\left(\frac{\beta y}{p'}-\frac{y}{p}\right)\eta'\right)\right]=$$

$$=\exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda}\left(\left(\frac{\beta x}{p'}-\frac{\beta\beta_{зр}x}{p'}\right)\xi'+\left(\frac{\beta y}{p'}-\frac{\beta\beta_{зр}}{p'}\right)\eta'\right)\right]=$$

$$=\exp\left[i\frac{2\pi\beta\left(1-\beta_{зр}\right)}{\lambda p'}\left(x\xi'+y\eta'\right)\right]. \qquad (6.93)$$

Подставив полученные выражения в (6.91), получим

$$\tau_A^{POC}\left(\xi',\eta';\vartheta'\right)=$$

$$=\frac{1}{\beta_{зр}}P_{зр}\left(\xi',\eta'\right)\exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda}\Delta l\left(\xi',\eta';\vartheta'\right)\right]\tau_{\varphi}^{POC}\left(\xi',\eta'\right), \qquad (6.94)$$

где

$$\tau_{\varphi}^{POC}\left(\xi',\eta'\right)=\exp\left[-i\frac{\pi\left(1-\beta\beta_{зр}\right)}{\lambda p'}\left(\xi'^2+\eta'^2\right)\right]\times$$

$$\times\exp\left[i\frac{2\pi\beta\left(1-\beta\beta_{зр}\right)}{\lambda p'}\left(x\xi'+y\eta'\right)\right] \qquad (6.95)$$

— фазовый коэффициент пропускания РОС.

Таким образом, если известно распределение волны в плоскости входного зрачка, то распределение волны в плоскости выходного зрачка определяется формулой

$$A'_{зр}\left(\xi',\eta';\vartheta'\right)=A_{зр}\left(\xi',\eta'\right)\tau_A^{POC}\left(\xi',\eta';\vartheta'\right). \qquad (6.96)$$

На практике при определении волновой аберрации область изображения разбивают на K кольцевых изопланатических зон шириной $\Delta\vartheta'_K=\vartheta'_K-\vartheta'_{K-1}$, в пределах которых волновую аберрацию можно считать постоянной. Для каждой k-й зоны вводится своя аберрационная функция зрачка, которая описывается выражением

$$P^{аб}_{зр(k)}\left(\xi',\eta'\right)=P_{зр}\left(\xi',\eta'\right)\exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda}\Delta l_k\left(\xi',\eta'\right)\right]. \qquad (6.97)$$

В дальнейшем индекс «k» будем опускать. Для определения когерентной функции рассеяния для k-й зоны используем дифракционный интеграл Френеля, тогда

$$h^{\text{РОС}}(x', y', x, y) =$$

$$= \frac{1}{i\lambda p'} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} A'_{\text{зр}}(\xi', \eta') \exp\left[i \frac{\pi}{\lambda p'} \left((\xi' - x')^2 + (\eta' - y')^2 \right) \right] d\xi' d\eta' =$$

$$= \frac{\beta}{\lambda^2 p'^2} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} P_{\text{зр}}^{\text{аб}}(\xi', \eta') \exp\left[-i \frac{\pi}{\lambda p'} \left(\xi'^2 + \eta'^2 \right) \right] \exp\left[i \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{\beta x}{p'} \xi' + \frac{\beta y}{p'} \eta' \right) \right] \times$$

$$\times \exp\left[-i \frac{\pi \beta_{\text{зр}}}{\lambda p' \beta} \left((\beta x)^2 + (\beta y)^2 \right) \right] \exp\left[i \frac{\pi}{\lambda p'} \left((\xi' - x')^2 + (\eta' - y')^2 \right) \right] d\xi' d\eta' =$$

$$= \frac{\beta}{\lambda^2 p'^2} \exp\left[-i \frac{\pi \beta_{\text{зр}}}{\lambda p' \beta} \left((\beta x)^2 + (\beta y)^2 \right) \right] \exp\left[i \frac{\pi}{\lambda p'} \left(x'^2 + y'^2 \right) \right] \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} P_{\text{зр}}^{\text{аб}}(\xi', \eta') \exp\left[-i \cdot 2\pi \left((x' - \beta x) \frac{\xi'}{\lambda p'} + (y' - \beta y) \frac{\eta'}{\lambda p'} \right) \right] d\xi' d\eta'. \quad (6.98)$$

Как и для однолинзового объектива, будем считать, что РОС формирует в каждой изопланатической зоне достаточно качественное изображение. Тогда на распределение волны в точке с координатами x' и y' оказывают влияние лишь точки, расположенные в очень малой окрестности вокруг точки с координатами x и y, и можно принять, что $x' \approx \beta x$, $y' \approx \beta y$. При таком допущении имеем

$$\exp\left[-i \frac{\pi \beta_{\text{зр}}}{\lambda p' \beta} \left((\beta x)^2 + (\beta y)^2 \right) \right] \approx \exp\left[-i \frac{\pi \beta_{\text{зр}}}{\lambda p' \beta} \left(x'^2 + y'^2 \right) \right]. \quad (6.99)$$

В большинстве случаев требуется определить пространственное распределение интенсивности в изображении, которое для РОС определяется формулой

$$I'(x', y') = \left| \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} A(x, y) h^{\text{РОС}}(x', y', x, y) dx dy \right|^2. \quad (6.100)$$

При вычислении распределения интенсивности множители $\exp\left[-i\frac{\pi\beta_{зр}}{\lambda p'\beta}\left(x'^2+y'^2\right)\right]$ и $\exp\left[i\frac{\pi}{\lambda p'}\left(x'^2+y'^2\right)\right]$ выносят за знак интеграла суперпозиции и они превращаются в единицы, поэтому пренебрежем этими множителями. Кроме того, КФР РОС для изопланатической зоны зависит лишь от разностей $(x'-\beta x)$ и $(y'-\beta y)$, поэтому РОС для каждой изопланатической зоны является пространственно-инвариантной системой. Следовательно, КФР можно представить в виде

$$h_\beta^{\text{РОС}}(x'-\beta x,\, y'-\beta y)\approx$$

$$\approx\frac{\beta}{\lambda^2 p'^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}P_{зр}(\xi',\eta')\exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda}\Delta l(\xi',\eta')\right]\times$$

$$\times\exp\left[-2\pi\left((x'-\beta x)\frac{\xi'}{\lambda p'}+(y'-\beta y)\frac{\eta'}{\lambda p'}\right)\right]d\xi' d\eta'. \qquad (6.101)$$

Если ввести пространственные частоты, выраженные через координаты в плоскости выходного зрачка, а именно $\nu_x=\xi'/\lambda p'$ и $\nu_y=\eta'/\lambda p'$, то выражение (6.101) принимает вид

$$h_\beta^{\text{РОС}}(x'-\beta x,\, y'-\beta y)=\beta\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}P_{зр}^{аб}\left(\lambda p'\nu_x,\lambda p'\nu_y\right)\times$$

$$\times\exp\left[-i\cdot 2\pi\left((x'-\beta x)\nu_x+(y'-\beta y)\nu_y\right)\right]d\nu_x d\nu_y. \qquad (6.102)$$

Приведенная КФР определяется соотношением

$$h^{\text{РОС}}(x'-\beta x,\, y'-\beta y)=\frac{1}{\beta}h_\beta^{\text{РОС}}(x'-\beta x,\, y'-\beta y). \qquad (6.103)$$

Если положить, что $x=0$ и $y=0$, то получим следующее выражение для приведенной КФР:

$$h^{\text{РОС}}(x',y')=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}P_{зр}^{аб}\left(\lambda p'\nu_x,\lambda p'\nu_y\right)\exp\left[-i\cdot 2\pi\left(x'\nu_x+y'\nu_y\right)\right]d\nu_x d\nu_y=$$

$$=F_{\nu_x\nu_y}\left\{P_{зр}^{аб}\left(\lambda p'\nu_x,\lambda p'\nu_y\right)\right\}=F^{-1}_{\nu_x\nu_y}\left\{P_{зр}^{аб}\left(-\lambda p'\nu_x,-\lambda p'\nu_y\right)\right\}. \qquad (6.104)$$

Если $p' = a'$, $\Delta l' = 0$, $\xi' = \xi$, $\eta' = \eta$, что соответствует тонкому однолинзовому объективу, то приведенная КФР определяется выражением

$$h(x' - \beta x,\, y' - \beta y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} P_{\text{зр}}(\lambda p' \nu_x,\, \lambda p' \nu_y) \times$$

$$\times \exp\left[-i \cdot 2\pi\left((x' - \beta x)\nu_x + (y' - \beta y)\nu_y\right)\right] d\nu_x d\nu_y \qquad (6.105)$$

или

$$h(x',\, y') = F_{\nu_x \nu_y}\left\{P_{\text{зр}}(\lambda a' \nu_x,\, \lambda a' \nu_y)\right\}, \qquad (6.106)$$

где $\nu_x = \xi/\lambda a'$ и $\nu_y = \eta/\lambda a'$.

Следовательно, КФР тонкого однолинзового объектива представляет собой частный случай КФР РОС.

Связь между комплексными амплитудами предмета и изображения

При когерентном освещении в ОС линейно суммируются комплексные амплитуды. Объект и изображение для изопланатической зоны связаны интегралом свертки

$$A'(x',\, y') = \beta \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} A(x,\, y) h^{\text{РОС}}(x' - \beta x,\, y' - \beta y)\, dx dy. \qquad (6.107)$$

После замены переменных $\beta x = u$ и $\beta y = v$ получим

$$A'(x',\, y') = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\beta} A\left(\frac{u}{\beta},\, \frac{v}{\beta}\right) h^{\text{РОС}}(x' - u,\, y' - v)\, du dv =$$

$$= \left[\frac{1}{\beta} A\left(\frac{x'}{\beta}, \frac{y'}{\beta}\right)\right] \otimes h^{\text{РОС}}(x',\, y') = A'_{\text{г}}(x',\, y') \otimes h^{\text{РОС}}(x',\, y'), \qquad (6.108)$$

где $A'_{\text{г}}(x',\, y') = \frac{1}{\beta} A\left(\frac{x'}{\beta}, \frac{y'}{\beta}\right)$ — идеальное (геометрическое) изображение предмета; $h^{\text{РОС}}(x',\, y')$ — приведенная КФР.

Взяв от выражения (6.108) преобразование Фурье, получим

$$\tilde{A}'(\nu_x, \nu_y) = \tilde{A}'_{\text{г}}(\nu_x, \nu_y)\tilde{h}^{\text{POC}}(\nu_x, \nu_y) = \\ = \beta\tilde{A}(\beta\nu_x, \beta\nu_y)\tilde{h}^{\text{POC}}(\nu_x, \nu_y), \qquad (6.109)$$

где $\tilde{A}'(\nu_x, \nu_y)$ — ПЧС изображения объекта; $\tilde{h}^{\text{POC}}(\nu_x, \nu_y)$ — КПФ ОС; $\tilde{A}(\beta\nu_x, \beta\nu_y)$ — ПЧС объекта, приведенный к плоскости изображения.

По определению КПФ имеет вид

$$\tilde{h}^{\text{POC}}(\nu_x, \nu_y) = F_{x'y'}\left\{h^{\text{POC}}(x', y')\right\} = \\ = F_{x'y'}\left\{F_{\nu_x\nu_y}\left(P_{\text{зр}}^{\text{аб}}(\lambda p'\nu_x, \lambda p'\nu_y)\right)\right\} = \\ = P_{\text{зр}}^{\text{аб}}(-\lambda p'\nu_x, -\lambda p'\nu_y) = \\ = P_{\text{зр}}(-\lambda p'\nu_x, -\lambda p'\nu_x)\exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda}\Delta l(-\lambda p'\nu_x, -\lambda p'\nu_y)\right]. \qquad (6.110)$$

Пространственно-частотное описание процесса формирования изображения показывает, что потеря разрешения при формировании изображения когерентной ОС обусловлена тем, что высокие пространственные частоты не пропускаются, так как КПФ имеет ограниченную полосу пропускания вследствие конечного размера зрачка. Кроме того, $\tilde{A}(\beta\nu_x, \beta\nu_y)$ — это масштабированный ПЧС объекта, так как $|\beta| \neq 1$. При изменении увеличения в ОС происходит преобразование, т. е. растяжение $(|\beta| < 1)$ или сжатие $(|\beta| > 1)$ ПЧС.

6.3.3. Формирование изображения реальной оптической системой при некогерентном излучении

Некогерентная ОС линейна относительно интенсивности. В случае некогерентного квазимонохроматического излучения объекта фазы излучения от разных точек объекта изменяются по статистически независимым законам. Поскольку интенсивность излучения в каждой точке изображения пропорциональна интенсивности в точке объекта, то распределение интенсивности в плоскости изображения в пространственно-инвариантной оп-

тической системе представляет собой взвешенную непрерывную сумму НКФР, описываемую интегралом свертки:

$$I'_\lambda(x', y') = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} I_\lambda(x, y) H_\beta^{\text{POC}}(x' - \beta x, y' - \beta y) dx dy, \quad (6.111)$$

где $I_\lambda(x, y)$ — распределение интенсивности в плоскости объекта; $H_\beta^{\text{POC}}(x', y')$ — НКФР ОС, которая связана с КФР соотношением

$$H_\beta^{\text{POC}}(x', y') = \left|h_\beta^{\text{POC}}(x', y')\right|^2. \quad (6.112)$$

Приведенная НКФР определяется выражением

$$H^{\text{POC}}(x', y') = \frac{1}{\beta^2} H_\beta^{\text{POC}}(x', y') = \left|h^{\text{POC}}(x', y')\right|^2. \quad (6.113)$$

Оптическая передаточная функция

Сделав замену переменных $\beta x = u$ и $\beta y = v$, представим интеграл свертки (6.111) в следующем виде:

$$I'_\lambda(x', y') = \frac{1}{\beta^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} I_\lambda\left(\frac{u}{\beta}, \frac{v}{\beta}\right) H_\beta^{\text{POC}}(x' - u, y' - v) du dv =$$

$$= I_\lambda\left(\frac{x'}{\beta}, \frac{y'}{\beta}\right) \otimes \frac{1}{\beta^2} H_\beta^{\text{POC}}(x', y') = I'_{\lambda\Gamma}(x', y') \otimes H^{\text{POC}}(x', y), \quad (6.114)$$

где $I'_{\lambda\Gamma}(x', y') = I_\lambda\left(\frac{x'}{\beta}, \frac{y'}{\beta}\right)$ — распределение интенсивности в идеальном геометрическом изображении.

Взяв преобразование Фурье от интеграла свертки (6.114), получим следующее выражение для ПЧС изображения:

$$\tilde{I}'_\lambda(\nu_x, \nu_y) = F\left\{I'_{\lambda\Gamma}(x', y') \otimes H^{\text{POC}}(x', y')\right\} =$$

$$= \tilde{I}'_{\lambda\Gamma}(\nu_x, \nu_y)\tilde{H}^{\text{POC}}(\nu_x, \nu_y) =$$

$$= \beta^2 \tilde{I}_\lambda(\beta\nu_x, \beta\nu_y)\tilde{H}^{\text{POC}}(\nu_x, \nu_y), \quad (6.115)$$

где $\beta^2 \tilde{I}'(\beta\nu_x, \beta\nu_y) = \tilde{I}'_г(\nu_x, \nu_y)$ — ПЧС идеального (геометрического) изображения; $\tilde{H}^{\text{POC}}(\nu_x, \nu_y) = F\{H^{\text{POC}}(x', y')\}$ — некогерентная передаточная функция (НКПФ) ОС.

На практике удобно использовать нормированную передаточную функцию $\tilde{H}_N^{\text{POC}}(\nu_x, \nu_y)$, называемую ***оптической передаточной функцией*** (ОПФ), которая определяется следующим выражением:

$$\tilde{H}_N^{\text{POC}}(\nu_x, \nu_y) = \frac{\tilde{H}^{\text{POC}}(\nu_x, \nu_y)}{\tilde{H}^{\text{POC}}(0,0)} = \frac{\tilde{H}^{\text{POC}}(\nu_x, \nu_y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} H^{\text{POC}}(x', y')dx'dy'} =$$

$$= \frac{F_{x'y'}\left\{\left|h^{\text{POC}}(x', y')\right|^2\right\}}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\tilde{h}^{\text{POC}}(\nu'_x, \nu'_y)\right|^2 d\nu'_x d\nu'_y}. \qquad (6.116)$$

В общем случае ОПФ является комплексной функцией, которую можно представить в виде

$$\tilde{H}_N^{\text{POC}}(\nu_x, \nu_y) = \left|\tilde{H}_N^{\text{POC}}(\nu_x, \nu_y)\right| \exp\left[i\Phi(\nu_x, \nu_y)\right]. \qquad (6.117)$$

Модуль ОПФ $N(\nu_x, \nu_y) = \left|\tilde{H}_N^{\text{POC}}(\nu_x, \nu_y)\right|$ называют ***модуляционной передаточной функцией*** (МПФ) или ***функцией передачи модуляции*** (ФПМ), а функцию $\Phi(\nu_x, \nu_y)$ — ***функцией передачи фазы*** (ФПФ) или ***частотно-фазовой характеристикой*** (ЧФХ).

Рассмотрим основные свойства ОПФ.

1. Свойство нормированности. Поскольку ОПФ является нормированной передаточной функцией, то $\tilde{H}_N^{\text{POC}}(0, 0) = 1$;

2. Свойство эрмитовости $\tilde{H}_N^{\text{POC}}(-\nu_x, -\nu_y) = \tilde{H}_N^{\text{POC}*}(\nu_x, \nu_y)$, т. е. ОПФ от пространственных частот, имеющих отрицательные значения, равно комплексно сопряженной ОПФ. Действительно, так как НКФР $H_N^{\text{POC}}(x', y')$ является действительной функцией, то

$$\tilde{H}_N^{\text{POC}}(\nu_x, \nu_y) = F_{x'y'}\left\{H_N^{\text{POC}}(x', y')\right\} =$$

$$= F_{x'y'}\left\{H_N^{\text{POC}*}(x', y')\right\} = \tilde{H}_N^{\text{POC}*}(-\nu_x, -\nu_y).$$

3. Свойство ограниченности. МПФ на любой пространственной частоте не превосходит своего значения на нулевой частоте $\left|\tilde{H}_N^{\text{POC}}(\nu_x, \nu_y)\right| \le \left|\tilde{H}_N^{\text{POC}}(0,0)\right|$. Для доказательства этого свойства используем неравенство Шварца — Буняковского, которое можно сформулировать следующим образом: если $A(\nu'_x, \nu'_y)$ и $B(\nu'_x, \nu'_y)$ — две любые комплексные функции двух переменных, то

$$\left|\iint AB d\nu'_x d\nu'_y\right|^2 \le \iint |A|^2 d\nu'_x d\nu'_y \iint |B|^2 d\nu'_x d\nu'_y .$$

Знак равенства ставится тогда, когда $B = CA^*$, где C — комплексная постоянная. Полагая $A(\nu'_x, \nu'_y) = \tilde{h}^{\text{POC}}(\nu'_x, \nu'_y)$ и $B(\nu'_x, \nu'_y) = \tilde{h}^{\text{POC}*}(\nu'_x - \nu_x, \nu'_y - \nu_y)$, получаем

$$\left|\tilde{H}^{\text{POC}}(\nu_x, \nu_y)\right|^2 = \left|\iint \tilde{h}^{\text{POC}}(\nu'_x, \nu'_y)\tilde{h}^{\text{POC}*}(\nu'_x - \nu_x, \nu'_y - \nu_y) d\nu'_x d\nu'_y\right|^2 \le$$

$$\le \iint \left|\tilde{h}^{\text{POC}}(\nu'_x, \nu'_y)\right|^2 d\nu'_x d\nu'_y \iint \left|\tilde{h}^{\text{POC}*}(\nu'_x - \nu_x, \nu'_y - \nu_y)\right|^2 d\nu'_x d\nu'_y =$$

$$= \left[\iint \left|\tilde{h}^{\text{POC}}(\nu'_x, \nu'_y)\right|^2 d\nu'_x d\nu'_y\right]^2 = \left|\tilde{H}^{\text{POC}}(0,0)\right|^2 .$$

Нормируя левую и правую части неравенства, находим, что функция $\left|\tilde{H}_N^{\text{POC}}(\nu_x, \nu_y)\right|$ всегда меньше или равна единице.

На практике при анализе преобразования оптических сигналов некогерентной ОС определяется пространственное распределение квазимонохроматической облученности $E_\lambda(x', y')$ в плоскости изображения. Если принять допущение о том, что яркость предмета не зависит от направления (ламбертовский источник), то при заданном пространственном распределении квазимонохроматической яркости $L_\lambda(x, y)$ в предметной плоскости ОС (рис. 6.12) распределение интенсивности излучения с каждой точки излучающей поверхности в пределах телесного угла $\Omega = \pi \sin^2 \sigma_A$ определяется выражением

$$I_\lambda(x, y) \approx \pi \sin^2 \sigma_A L_\lambda(x, y), \qquad (6.118)$$

где σ_A — передний апертурный угол ОС.

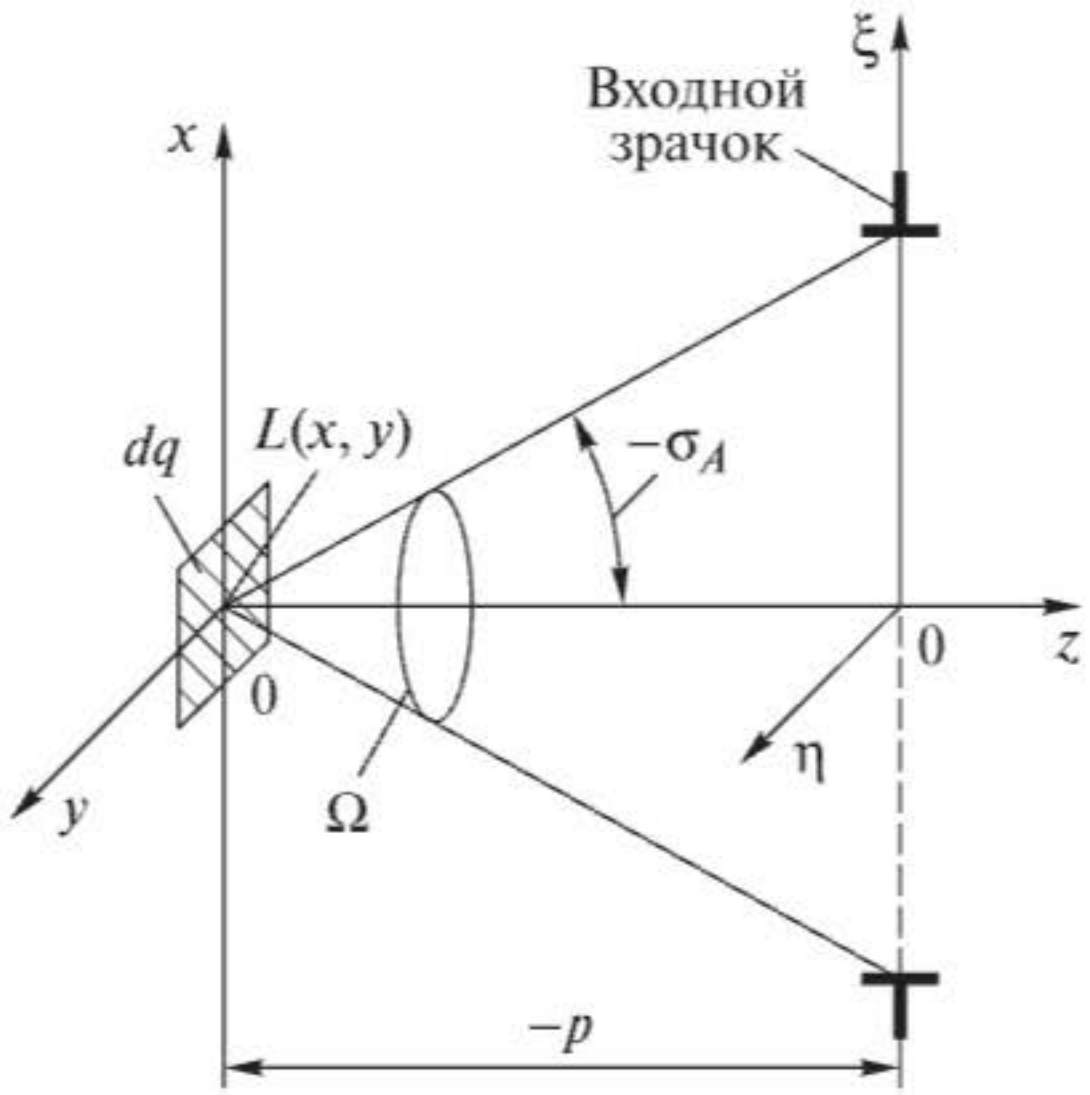


Рис. 6.12. К определению интенсивности излучения в плоскости предмета

Тогда с учетом интеграла свертки (6.111) распределение квазимонохроматической облученности в плоскости изображения линейной пространственно-инвариантной некогерентной ОС примет вид

$$E_\lambda(x', y') = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} I_\lambda(x, y) H_\beta^{\text{POC}}(x' - \beta x, y' - \beta y)dxdy =$$

$$= \pi \sin^2 \sigma_A \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} L_\lambda(x, y) H_\beta^{\text{POC}}(x' - \beta x, y' - \beta y)\, dxdy. \quad (6.119)$$

Проведя замену переменных $\beta x = u$ и $\beta y = v$, получим

$$E_\lambda(x', y') =$$

$$= \pi \sin^2 \sigma_A \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} L_\lambda\left(\frac{u}{\beta}, \frac{v}{\beta}\right) H^{\text{POC}}(x' - u, y' - v)dudv =$$

$$= \pi \sin^2 \sigma_A L_\lambda\left(\frac{x'}{\beta}, \frac{y'}{\beta}\right) \otimes H^{\text{POC}}(x', y'), \quad (6.120)$$

где $\pi \sin \sigma_A^2 L_\lambda\left(\frac{x'}{\beta}, \frac{y'}{\beta}\right)$ — идеальное геометрическое изображение предмета. Взяв преобразование Фурье от левой и правой частей уравнения (6.120), получим

$$\tilde{E}_\lambda(\nu_x, \nu_y) = \beta^2 \pi \sin^2 \sigma_A \tilde{L}_\lambda(\beta\nu_x, \beta\nu_y) \tilde{H}^{\text{POC}}(\nu_x, \nu_y). \quad (6.121)$$

Поток излучения в изображении точечного источника

Известно, что для ламбертовского точечного источника пространственное распределение квазимонохроматической яркости можно представить следующим выражением:

$$L_{\lambda\delta}(x, y) = J_{\lambda\delta}\delta(x, y),$$

где $J_{\lambda\delta}$ — сила квазимонохроматического излучения.

Пусть поток излучения Φ_δ от точечного источника в пределах телесного угла Ω, ограниченного входным зрачком ОС (рис. 6.13), равен единице.

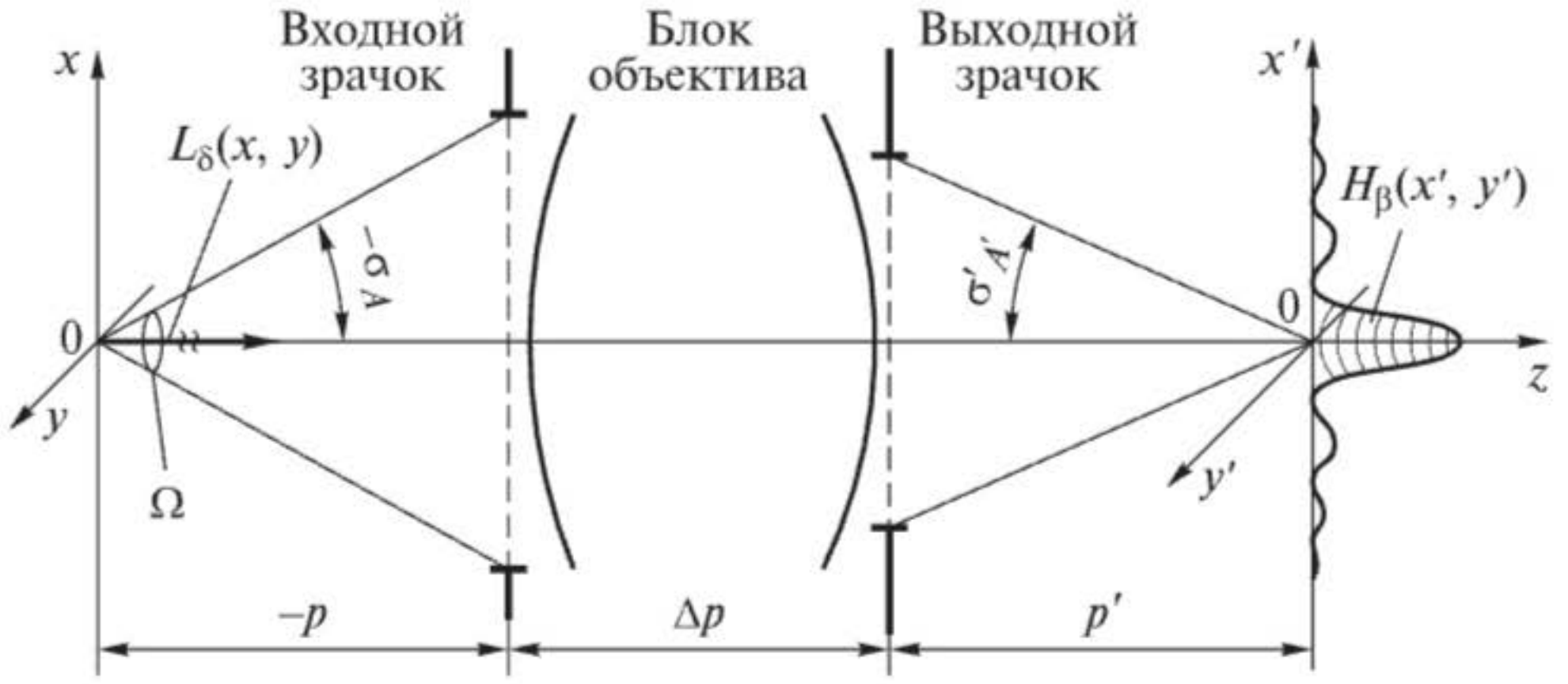


Рис. 6.13. Формирование изображения точечного источника ОС при некогерентном излучении

Это условие выражается соотношением

$$\Phi_{\lambda\delta} = \pi \sin^2 \sigma_A \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} L_{\lambda\delta}(x, y)dxdy =$$

$$= J_{\lambda\delta}\pi \sin^2 \sigma_A \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x, y)dxdy = 1, \quad (6.122)$$

из которого следует, что $J_{\lambda\delta}\pi \sin^2 \sigma_A = 1$.

Пространственное распределение облученности $E_{\lambda\delta}(x', y')$ в изображении точечного источника, формируемого некогерентной оптической системой, описывается НКФР, т. е. $E_{\lambda\delta}(x', y') = H_{\beta}^{\text{POC}}(x', y')$. В соответствии с законом сохранения энергии поток $\Phi'_{\lambda\delta}$ в изображении точечного источника с учетом потерь излучения на компонентах ОС должен быть равен потоку излучения от точечного источника. Поэтому можно записать следующее равенство:

$$\Phi'_{\lambda\delta} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E_{\lambda\delta}(x', y')dx'dy' = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H_{\beta}^{\text{POC}}(x', y')dx'dy' =$$

$$= \beta^2 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H^{\text{POC}}(x', y')dx'dy' = \Phi_{\lambda\delta}\tau_{\text{OC}} = \tau_{\text{OC}}, \qquad (6.123)$$

где τ_{OC} — коэффициент пропускания ОС по интенсивности.

Введем в рассмотрение нормированную некогерентную функцию рассеяния, получаемую путем нормировки приведенной функции рассеяния:

$$H_N^{\text{POC}}(x', y') = \frac{H^{\text{POC}}(x', y')}{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H^{\text{POC}}(x', y')dx'dy'} =$$

$$= \frac{H_{\beta}^{\text{POC}}(x', y')}{\int_{\infty}^{\infty}\int_{\infty}^{\infty} H_{\beta}^{\text{POC}}(x', y')dx'dy'} =$$

$$= \frac{\beta^2 H^{\text{POC}}(x', y')}{\tau_{\text{OC}}} = \frac{H_{\beta}^{\text{POC}}(x', y')}{\tau_{\text{OC}}}. \qquad (6.124)$$

Следовательно, справедливы соотношения

$$H^{\text{POC}}(x', y') = \frac{\tau_{\text{OC}} H_N^{\text{POC}}(x', y')}{\beta^2}; \qquad (6.125)$$

$$H_{\beta}^{\text{POC}}(x', y') = \tau_{\text{OC}} H_N^{\text{POC}}(x', y').$$

Поскольку $\tilde{H}^{\text{POC}}(0\ 0) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H^{\text{POC}}(x'\ y')dx'dy' = \frac{\tau_{\text{OC}}}{\beta^2}$, то

$$\tilde{H}_N^{\text{POC}}(\nu_x, \nu_y) = F_{x'y'}\left\{H_N^{\text{POC}}(x', y')\right\} =$$

$$= \frac{\beta^2 \tilde{H}^{\text{POC}}(\nu_x, \nu_y)}{\tau_{\text{OC}}} = \frac{\tilde{H}_\beta^{\text{POC}}(\nu_x, \nu_y)}{\tau_{\text{OC}}}. \qquad (6.126)$$

С учетом соотношений (6.125) зависимости (6.120) и (6.121) принимают вид

$$E_\lambda(x', y') = \pi\tau_{\text{OC}} \sin^2\sigma'_A L_\lambda\left(\frac{x'}{\beta}, \frac{y'}{\beta}\right) \otimes H_N^{\text{POC}}(x', y'); \qquad (6.127)$$

$$\tilde{E}_\lambda(\nu_x, \nu_y) = \pi\tau_{\text{OC}}\beta^2 \sin^2\sigma'_A \tilde{L}_\lambda(\beta\nu_x, \beta\nu_y)\tilde{H}_N^{\text{POC}}(\nu_x, \nu_y), \qquad (6.128)$$

где $\sin\sigma'_A = \sin\sigma_A/\beta$ — синус заднего апертурного угла.

6.3.4. Связь оптической передаточной функции с когерентной передаточной функцией

Понятие ОПФ позволяет рассматривать некогерентную ОС как фильтр пространственных частот. При этом ОПФ представляет собой комплексный весовой множитель, который показывает, как изменяется амплитуда и фаза пространственно-частотных гармоник двумерного сигнала с частотами ν_x и ν_y по отношению к гармонике на нулевой пространственной частоте. Поскольку при некогерентном освещении приведенная НКФР

$$H^{\text{POC}}(x', y') = \left|h^{\text{POC}}(\ \ ,\ \ )\right|^2 y$$

а КПФ $\tilde{h}^{\text{POC}}(\nu_x, \nu_y)$ в соответствии с формулой (6.110) определяется через функцию зрачка, то и ОПФ также можно выразить через функцию зрачка. Как будет показано ниже, связь между ОПФ и функцией зрачка оказывается более сложной. Поэтому процесс фильтрации пространственных частот при некогерентном освещении имеет свои характерные особенности, отсутствующие при когерентном освещении.

По определению ОПФ выражается формулой

$$\tilde{H}_N^{\text{POC}}(\nu_x, \nu_y) =$$

$$= F_{x'y'}\left\{\left|h^{\text{POC}}(x', y')\right|^2\right\} \Big/ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left|h^{\text{POC}}(x', y')\right|^2 dx'dy'. \qquad (6.129)$$

Поскольку преобразование Фурье от квадрата модуля некоторой функции равно функции ковариации фурье-образов, то

$$F_{x'y'}\left\{\left|h^{\mathrm{POC}}(x', y')\right|^2\right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}^{\mathrm{POC}}(\nu'_x, \nu'_y)\tilde{h}^{\mathrm{POC}*}(\nu'_x - \nu_x, \nu'_y - \nu_y)d\nu'_x d\nu'_y. \quad (6.130)$$

На основании теоремы Парсеваля нормирующий множитель в формуле (6.129) можно представить в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|h^{\mathrm{POC}}(x', y')\right|^2 dx'dy' = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\tilde{h}^{\mathrm{POC}}(\nu'_x, \nu'_y)\right|^2 d\nu'_x d\nu'_y =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|P_{\mathrm{зр}}^{\mathrm{аб}}(-\lambda p'\nu'_x, -\lambda p'\nu'_y)\right|^2 d\nu'_x d\nu'_y =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} P_{\mathrm{зр}}^2(\lambda p'\nu'_x, \lambda p'\nu'_y)d\nu'_x d\nu'_y. \quad (6.131)$$

Выразим функции, входящие в выражение (6.130), также через функцию зрачка, тогда имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{h}^{\mathrm{POC}}(\nu'_x, \nu'_y)\tilde{h}^{\mathrm{POC}*}(\nu'_x - \nu_x, \nu'_y - \nu_y)d\nu'_x d\nu'_y =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} P_{\mathrm{зр}}^{\mathrm{аб}}(-\lambda p'\nu'_x, -\lambda p'\nu'_y)P_{\mathrm{зр}}^{\mathrm{аб}*}\left[-\lambda p'(\nu'_x - \nu_x), \lambda p'(\nu'_y - \nu_y)\right]d\nu'_x d\nu'_y =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} P_{\mathrm{зр}}(-\lambda p'\nu'_x, -\lambda p'\nu'_y)\exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda}\Delta l(-\lambda p'\nu'_x, -\lambda p'\nu'_y)\right]\times$$

$$\times P_{\mathrm{зр}}\left[-\lambda p'(\nu'_x - \nu_x), -\lambda p'(\nu'_y - \nu_y)\right]\times$$

$$\times\exp\left[-\frac{2\pi}{\lambda}\Delta\left(-\lambda\,'(\nu'_x - \nu_x), -i\lambda\,'(\nu l_y - \nu p_y)\right)\right]\ \nu'_x\ \nu'_y\quad p$$

Заменим в этом выражении ν'_x на $-\nu'_x$ и ν'_y на $-\nu'_y$, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{h}^{\mathrm{POC}}\left(\nu'_x\nu'_y\right)\tilde{h}^{\mathrm{POC}*}\left(\nu'_x-\nu_x,\nu'_y-\nu_y\right)d\nu'_x d\nu'_y=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}P_{\mathrm{зр}}\left(\lambda p'\nu'_x,\lambda p'\nu'_y\right)P_{\mathrm{зр}}\left[\lambda p'\left(\nu'_x+\nu_x\right),\lambda p'\left(\nu'_y+\nu_y\right)\right]\times$$

$$\times\exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda}\left(\Delta l\left(\lambda p'\nu'_x,\lambda p'\nu'_y\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\Delta l\left(\lambda p'\left(\nu'_x+\nu_x\right),\lambda p'\left(\nu'_y+\nu_y\right)\right)\right)\right]d\nu'_x d\nu'_y. \qquad (6.132)$$

С учетом выражений (6.131) и (6.132) можно записать

$$\tilde{H}_N^{\mathrm{POC}}\left(\nu_x,\nu_y\right)=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}P_{\mathrm{зр}}\left(\lambda p'\nu'_x,\lambda p'\nu'_y\right)P_{\mathrm{зр}}\left[\lambda p'\left(\nu'_x+\nu_x\right),\lambda p'\left(\nu'_y+\nu_y\right)\right]\times$$

$$\times\exp\left\{i\frac{2\pi}{\lambda}\left[\Delta l\left(\lambda p'\nu'_x,\lambda p'\nu'_y\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\Delta l\left(\lambda p'\left(\nu'_x+\nu_x\right),\lambda p'\left(\nu'_y+\nu_y\right)\right)\right]\right\}d\nu'_x d\nu'_y\times$$

$$\times\frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}P_{\mathrm{зр}}^2\left(\lambda p'\nu'_x,\lambda p'\nu'_y\right)d\nu'_x d\nu'_y}, \qquad (6.133)$$

где $\Delta l\left(\lambda p'\nu'_x,\lambda p'\nu'_y\right)$ — волновая аберрация для заданной изопланатической зоны.

Если выполнить замену переменных $\xi'=\lambda p'\nu'_x,\ \eta'=\lambda p'\nu'_y$, то выражение (6.133) преобразуется к следующему виду:

$$\tilde{H}_N^{\mathrm{POC}}\left(\nu_x,\nu_y\right)=\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}P_{\mathrm{зр}}\left(\xi',\eta'\right)P_{\mathrm{зр}}\left(\xi'+\lambda p'\nu_x,\eta'+\lambda p'\nu_y\right)\times\right.$$

$$\left.\times\exp\left\{i\frac{2\pi}{\lambda}\left[\Delta l\left(\xi',\eta'\right)-\Delta l\left(\xi'+\lambda p'\nu_x,\eta'+\lambda p'\nu_y\right)\right]\right\}d\xi' d\eta'\right\}\times$$

$$\times\frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}P_{\mathrm{зр}}^2\left(\xi',\eta'\right)d\xi' d\eta'}. \qquad (6.134)$$

Отметим, что при вычислении ковариации по формулам (6.133) и (6.134) для положительных частот функцию зрачка необходимо перемещать в отрицательном направлении осей ν'_x и ν'_y или ξ' и η'.

Рассмотрим геометрическую интерпретацию ОПФ дифракционно-ограниченной ОС ($\Delta l = 0$).

После замены переменных в числителе формулы (6.134) $\xi' = \xi'' - \lambda p' \nu_x / 2$ и $\eta' = \eta'' - \lambda p' \nu_y / 2$, получим выражение

$$\tilde{H}_N(\nu_x, \nu_y) = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P_{\text{зр}}\left(\xi'' - \lambda p' \nu_x / 2,\ \eta'' - \lambda p' \nu_y / 2\right) \times \right.$$

$$\left. \times P_{\text{зр}}\left(\xi'' + \lambda p' \nu_x / 2,\ \eta'' + \lambda p' \nu_y / 2\right) d\xi'' d\eta'' \right\} \times$$

$$\times \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P_{\text{зр}}^2(\xi', \eta') d\xi' d\eta'}. \qquad (6.135)$$

Если

$$P_{\text{зр}}(\xi', \eta') = \begin{vmatrix} 1 & (\xi', \eta') \in D_{\text{зр}}; \\ 0 & (\xi', \eta') \notin D_{\text{зр}}, \end{vmatrix}$$

то числитель в выражении (6.135) представляет собой площадь $S_{\text{пер}}$ области пересечения $D_{\text{пер}} = D_{\text{зр1}} \bigcap D_{\text{зр2}}$ двух смещенных зрачков, центр одного из которых находится в точке $O_1\left(\xi' = \lambda p' \nu_x / 2,\ \eta' = \lambda p' \nu_y / 2\right)$, а центр другого — в центрально симметричной точке $O_2\left(\xi' = -\lambda p' \nu_x / 2,\ \eta' = -\lambda p' \nu_y / 2\right)$.

Знаменатель осуществляет нормировку площади пересечения на полную площадь зрачка. Тем самым значение ОПФ для пространственных частот ν_x и ν_y представляет собой относительную долю площади пересечения двух смещенных зрачков от площади всего зрачка, поэтому из выражения (6.135) следует

$$\tilde{H}_N(\nu_x, \nu_y) = \left[\iint_{D_{\text{пер}}} d\xi' d\eta' \Big/ \iint_{D_{\text{зр}}} d\xi' d\eta' \right]_{\substack{\xi' = \lambda p' \nu_x \\ \eta' = \lambda p' \nu_y}} =$$

$$= \left[S_{\text{пер}}(\xi', \eta') / S_{\text{зр}} \right]_{\substack{\xi' = \lambda p' \nu_x \\ \eta' = \lambda p' \nu_y}}. \qquad (6.136)$$

Такой подход в ряде случаев позволяет значительно упростить вычисления ОПФ. Для выходного зрачка простой формы обычно легко найти общее выражение для площади области перекрытия. В случае зрачка произвольной формы можно приближенно по формуле (6.136) найти ряд значений ОПФ для дискретного набора пространственных частот.

6.3.5. Связь волновых и геометрических аберраций

При наличии аберраций в реальной ОС волновой фронт в выходном зрачке, соответствующий точечному источнику в предметной плоскости, отличается от сферической волны, сходящейся в сопряженной точке геометрического изображения. Для описания степени отклонения реальной монохроматической волны от идеальной в плоскости выходного зрачка используется понятие «волновая аберрация». Функция $\Delta l(\xi', \eta'; \vartheta')$, характеризующая волновую аберрацию, определяет линейное отклонение реальной волновой поверхности от сферы сравнения, измеряемое вдоль радиуса этой сферы (рис. 6.14). Аргументами этой функции являются координаты ξ', η' в плоскости выходного зрачка, а величина ϑ' — параметр, который определяет смещение точки P' идеального изображения предмета относительно оптической оси (см. рис. 6.10). Отклонения волновых фронтов от сферических в плоскости выходного зрачка, описываемые функцией волновой аберрации, приводят к геометрическим аберрациям в плоскости изображения.

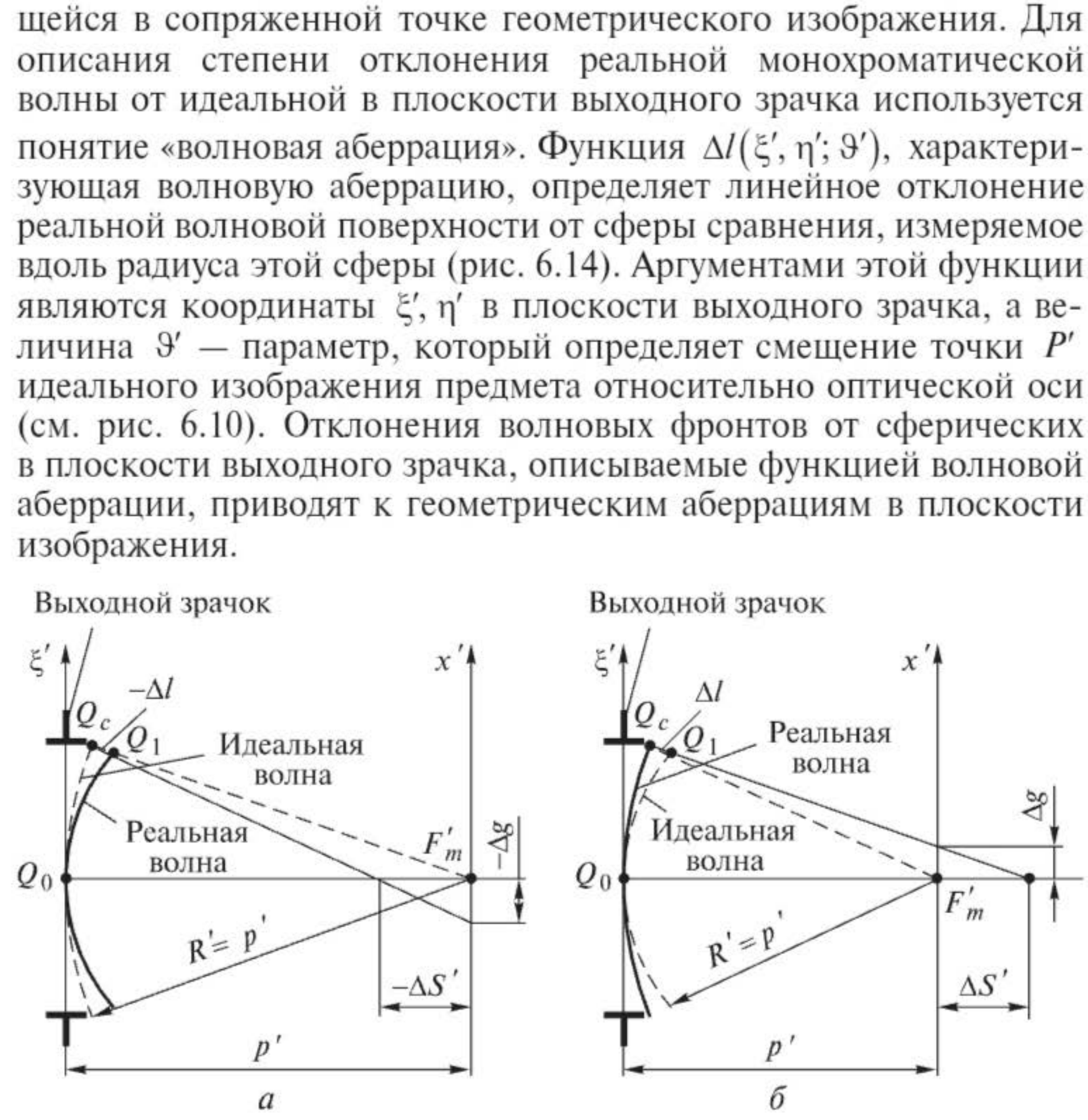


Рис. 6.14. Волновая аберрация реальной ОС

Волновая аберрация измеряется в миллиметрах, микронах либо в долях длины волны. Для волновой аберрации устанавливается правило знаков. Рассмотрим ряд лучей, принадлежащих пучку, исходящему из некоторой точки объекта. Для простоты ограничимся лучами, лежащими в меридиональной плоскости. Пусть Q_0Q_1 — кривая, ортогональная всем лучам пучка. Эта кривая лежит в меридиональном сечении реальной волновой поверхности. Через точку Q_0 проведем окружность Q_0Q_c радиусом R', центр которой находится в меридиональном фокусе F'_m параксиальных лучей. Точка Q_c принадлежит сфере сравнения и не совпадает с точкой Q_1. При этом оптическая длина пути, отсчитываемая от предметной точки P до точки Q_1, отличается от оптической длины пути до точки Q_c на величину волновой аберрации $\Delta l(\xi', \eta'; \vartheta')$.

Волновая аберрация считается положительной (см. рис. 6.14, *б*), если реальная волновая поверхность расположена левее идеальной волны. При этом продольная и поперечная аберрации также являются положительными. Волновая аберрация отрицательна (см. рис. 6.14, *а*), если реальная волновая поверхность расположена правее идеальной волны. Этот случай соответствует отрицательным продольной и поперечной аберрациям.

Для ОС с осевой симметрией функция волновой аберрации задается в полярной системе координат. Разложение функции $\Delta l(\rho, \varphi; \vartheta')$ волновой аберрации в степенной ряд представляют зависимостью от трех инвариантов вращения: ϑ'^2, ρ^2, $\vartheta'\rho\cos\varphi$, где $\rho = \rho'/\rho'_{зр}$ — радиус выходного зрачка в относительных единицах ($0 \le \rho \le 1$). Такой степенной ряд имеет вид

$$\Delta l(\rho, \varphi, \vartheta') = A_0 + B_0\vartheta'^2 + B_1\rho^2 + B_2\vartheta'\rho\cos\varphi + C_0\vartheta'^2 + \\ + C_1\rho^4 + C_2\vartheta'^2\rho^2\cos^2\varphi + C_3\vartheta'^2\rho^2 + C_4\vartheta'^3\rho\cos\varphi + \\ + C_5\vartheta'\rho^3\cos\varphi + D_0\vartheta'^6 + D_1\rho^6 + \ldots, \qquad (6.137)$$

где A_0 — слагаемое, зависящее от выбранного радиуса сферы сравнения; $B_0\vartheta'^2, C_0\vartheta'^4, D_0\vartheta'^6$ — слагаемые, обусловленные смещением центра сферы сравнения на ϑ'; $B_1\rho^2$, $B_2\vartheta'\rho\cos\varphi$ — продольная и поперечная дефокусировки (децентрировки); $C_1\rho^4$ — сферическая аберрация третьего порядка; $C_2\vartheta'^2\rho^2\cos^2\varphi$ — астигматизм третьего порядка; $C_3\vartheta'^2\rho^2$ — кривизна поля изображения третьего порядка; $C_4\vartheta'^3\rho\cos\varphi$ — дисторсия третьего порядка; $C_5\vartheta'\rho^3\cos\varphi$ —

кома третьего порядка; $D_1\rho^6$ — сферическая аберрация пятого порядка.

Найдем уравнение луча, идущего из точки $Q(\xi', \eta', \zeta')$, лежащей на поверхности реальной волны S', в произвольную точку $Q'(x', y', z')$ плоскости изображения (рис. 6.15).

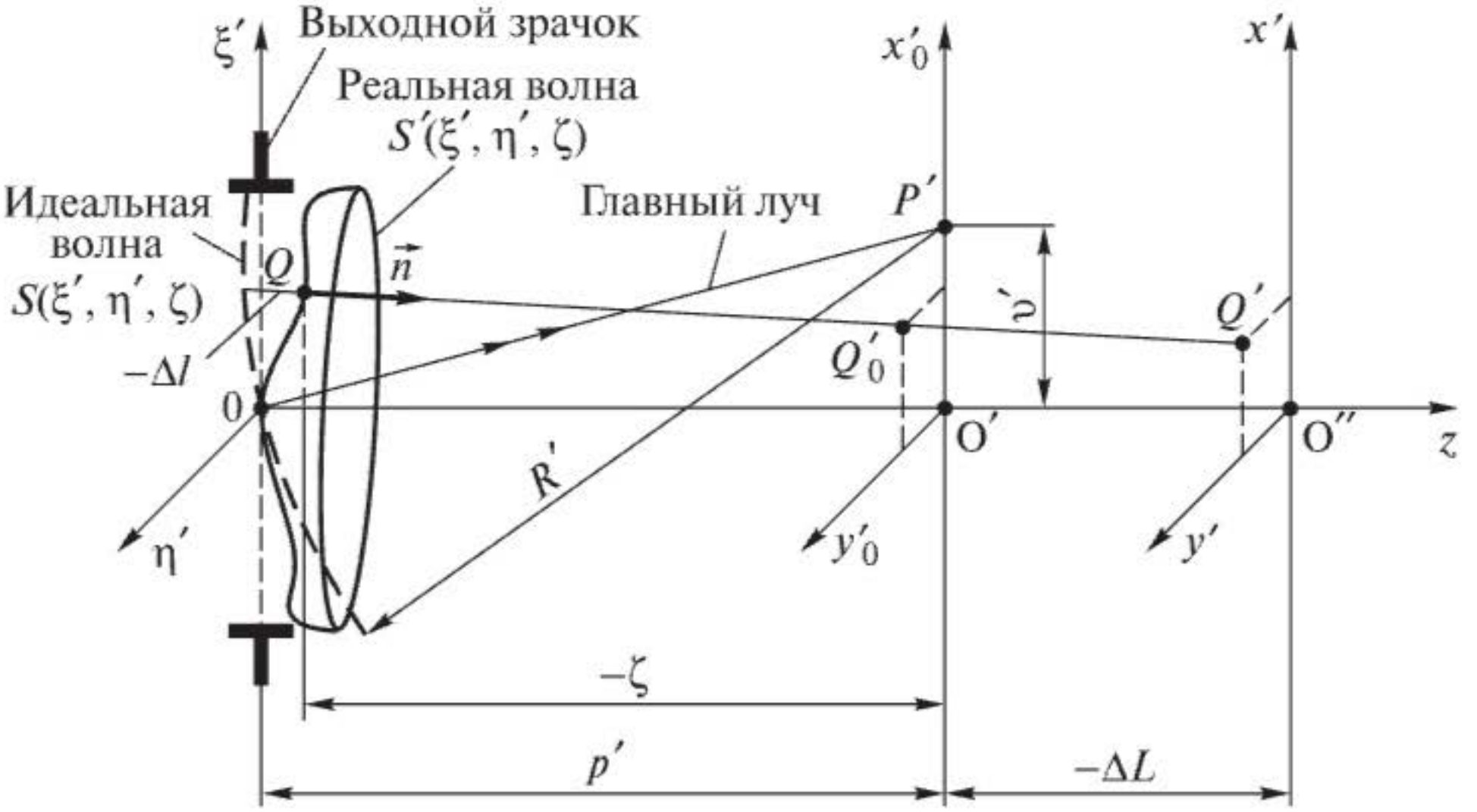


Рис. 6.15. Связь волновой и геометрических аберраций

Идеальная волновая поверхность S представляет собой сферу радиусом R' с центром в точке $P'(\vartheta', 0)$, которую можно записать в виде уравнения

$$S(\xi', \eta', \zeta') = (\xi' - \vartheta')^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 - R' = 0, \qquad (6.138)$$

где ζ' — расстояние от точки O' до проекции точки Q на ось z'.

Реальная волновая поверхность отличается от сферы сравнения S на величину волновой аберрации $\Delta l(\xi', \eta', \vartheta')$, так что ее уравнение имеет вид

$$S'(\xi', \eta', \zeta') = (\xi' - \vartheta')^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 - \left(R' - \Delta l(\xi', \eta', \vartheta')\right)^2 = 0. \qquad (6.139)$$

Поскольку волновая аберрация, как правило, мала по сравнению с радиусом R', то $\Delta l^2(\xi', \eta'; \vartheta')$ можно пренебречь как величиной второго порядка малости, и представить уравнение реальной волновой поверхности в виде

$$S'(\xi', \eta', \zeta') \approx (\xi' - \vartheta')^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 - R' + 2R'\Delta l(\xi', \eta', \vartheta'). \qquad (6.140)$$

Уравнение луча QQ' зададим уравнением нормали к реальной волновой поверхности S', заданным в неявной форме, при прохождении ее через точки Q и Q':

$$\frac{x' - \xi'}{\partial S'/\partial \xi'} = \frac{y' - \eta'}{\partial S'/\partial \eta'} = \frac{z' - \zeta'}{\partial S'/\partial \zeta'}, \qquad (6.141)$$

где частные производные вычисляют в фиксированной точке $Q(\xi', \eta', \zeta')$ на волновой поверхности.

Частные производные уравнения (6.140) описываются выражениями

$$\frac{\partial S'}{\partial \xi'} = 2(\xi' - \vartheta') - 2R'\frac{\partial \Delta l(\xi', \eta', \vartheta')}{\partial \xi};$$

$$\frac{\partial S'}{\partial \eta'} = 2\eta' - 2R'\frac{\Delta l(\xi', \eta', \vartheta')}{\partial \eta'}; \qquad (6.142)$$

$$\frac{\partial S'}{\partial \zeta'} = 2\zeta'.$$

Подставив эти выражения в уравнение (6.141), получим

$$\frac{x' - \xi'}{2(\xi' - \vartheta') - 2R'\dfrac{\partial \Delta l}{\partial \xi'}} = \frac{y' - \eta'}{2\eta' - 2R'\dfrac{\partial \Delta l}{\partial \eta'}} = \frac{z' - \zeta'}{2\zeta'}. \qquad (6.143)$$

Поскольку для плоскости параксиального изображения (плоскости Гаусса) $z' = -\Delta L = 0$, то соотношение (6.143) принимает вид

$$\frac{x'_0 - \xi'}{\xi' - \vartheta' - R'\dfrac{\partial \Delta l}{\partial \xi'}} = \frac{y'_0 - \eta'}{\eta' - R'\dfrac{\partial \Delta l}{\partial \eta'}} = -1, \qquad (6.144)$$

где x'_0, y'_0 — координаты точки Q'_0 в плоскости Гаусса.

Из соотношения (6.144) получаем систему уравнений

$$x'_0 - \xi' = -\xi' + \vartheta' + R'\frac{\partial \Delta l}{\partial \xi'};$$

$$y'_0 - \eta' = -\eta' + R'\frac{\partial \Delta l}{\partial \eta'},$$

из которой следуют формулы для поперечных аберраций:
в меридиональной плоскости

$$\Delta g' = x'_0 - \vartheta' = R'\frac{\partial \Delta l}{\partial \xi'} \approx p'\frac{\partial \Delta l}{\partial \xi'}; \qquad (6.145)$$

в сагиттальной плоскости

$$\Delta G' = y'_0 = R'\frac{\partial \Delta l}{\partial \eta'} \approx p'\frac{\partial \Delta l}{\partial \eta'}. \qquad (6.146)$$

Если угловое поле ОС невелико, то $R' \approx p'$. При достаточно большом угловом поле можно считать, что $R' = \sqrt{p'^2 + \vartheta'^2} \approx$

$\approx \left(1 + \frac{\vartheta'^2}{2p'^2}\right)p'$. Погрешность такого допущения при угловом поле ОС $2\omega' \le 60°$ не превышает 1 %.

Если плоскость наблюдения $x'0y'$ смещена относительно плоскости Гаусса на величину $-\Delta L = z'$, то уравнение (6.143) преобразуется к виду

$$\frac{x' - \xi'}{\xi' - \vartheta' - R'\frac{\partial \Delta l}{\partial \xi'}} = \frac{y' - \eta'}{\eta' - R'\frac{\partial \Delta l}{\partial \eta'}} = \frac{z'}{\zeta'} - 1, \qquad (6.147)$$

из которого получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} x' - \vartheta' &= \frac{z'}{\zeta'}\xi' - \xi' - \frac{z'\vartheta'}{\zeta'} + \vartheta' - R'\left(\frac{z'}{\zeta'} - 1\right)\frac{\partial \Delta l}{\partial \xi'}; \\ y' - \eta' &= \frac{z'\eta'}{\zeta'} - \eta' - R'\left(\frac{z'}{\zeta'} - 1\right)\frac{\partial \Delta l}{\partial \eta'}. \end{aligned} \qquad (6.148)$$

Поскольку $\vartheta' << \zeta'$ и $z' << \zeta'$, $\zeta' \approx -p'$, $R' \approx p'$, то формулы для поперечных аберраций будут иметь вид

$$\Delta g' = x' - \vartheta' = -\frac{\xi'}{p'} z' + p' \frac{\partial \Delta l}{\partial \xi'};$$
$$\Delta G' = y' = -\frac{\eta'}{p'} z' + p' \frac{\partial \Delta l}{\partial \eta'}. \qquad (6.149)$$

Если поперечные аберрации $\Delta g'$ и $\Delta G'$ заданы как функции от ξ' и η', то для плоскости Гаусса волновую аберрацию можно вычислить по формуле [5]:

$$\Delta l = \frac{1}{p'} \left[\int_0^{\xi' M} \Delta g' d\xi' + \int_0^{\eta' M} \Delta G' d\eta' \right]. \qquad (6.150)$$

Поперечные аберрации $\Delta g'$ и $\Delta G'$ можно выразить через волновую аберрацию, заданную в полярной системе координат. Для этого необходимо определить $\frac{\partial \Delta l}{\partial \xi'}$ и $\frac{\partial \Delta l}{\partial \eta'}$ при задании волновой аберрации в полярной системе координат, т. е. $\Delta l(\rho', \varphi)$. Выполнив замену переменных $\xi' = \rho' \cos\varphi = \rho \rho'_{зр} \cos\varphi$, $\eta' = \rho' \sin\varphi = \rho \rho'_{зр} \sin\varphi$, вычислим частные производные $\frac{\partial \Delta l}{\partial \rho}$ и $\frac{\partial \Delta l}{\partial \varphi}$:

$$\frac{\partial \Delta l}{\partial \rho} = \frac{\partial \Delta l}{\partial \xi'} \frac{\partial \xi'}{\partial \rho} + \frac{\partial \Delta l}{\partial \eta'} \frac{\partial \eta'}{\partial \rho} = \rho'_{зр} \left(\frac{\partial \Delta l}{\partial \xi'} \cos\varphi + \frac{\partial \Delta l}{\partial \eta'} \sin\varphi \right);$$
$$\frac{\partial \Delta l}{\partial \varphi} = \frac{\partial \Delta l}{\partial \xi'} \frac{\partial \xi'}{\partial \varphi} + \frac{\partial \Delta l}{\partial \eta'} \frac{\partial \eta'}{\partial \varphi} = \rho \rho'_{зр} \left(-\sin\varphi \frac{\partial \Delta l}{\partial \xi'} + \cos\varphi \frac{\partial \Delta l}{\partial \eta'} \right). \qquad (6.151)$$

Выразим $\frac{\partial \Delta l}{\partial \eta'}$ из второго уравнения

$$\frac{\partial \Delta l}{\partial \eta'} = \frac{1}{\rho \rho'_{зр} \cos\varphi} \left(\frac{\partial \Delta l}{\partial \varphi} + \rho \rho'_{зр} \sin\varphi \frac{\partial \Delta l}{\partial \xi'} \right) \qquad (6.152)$$

и подставим его в первое уравнение, тогда

$$\frac{\partial \Delta l}{\partial \rho} = \rho'_{зр}\left[\cos\varphi\frac{\partial \Delta l}{\partial \xi'} + \frac{\sin\varphi}{\rho\rho'_{зр}\cos\varphi}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{\partial \Delta l}{\partial \varphi} + \rho\rho'_{зр}\sin\varphi\frac{\partial \Delta l}{\partial \xi'}\right)\right] = \rho'_{зр}\left[\frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial \Delta l}{\partial \xi'} + \frac{\sin\varphi}{\rho'_{зр}\rho\cos\varphi}\frac{\partial \Delta l}{\partial \varphi}\right]. \quad (6.153)$$

Отсюда

$$\frac{\partial \Delta l}{\partial \xi'} = \frac{1}{\rho'_{зр}}\left(\cos\varphi\frac{\partial \Delta l}{\partial \rho} - \frac{\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial \Delta l}{\partial \varphi}\right). \quad (6.154)$$

Подставив выражение (6.154) в уравнение (6.152), получим

$$\frac{\partial \Delta l}{\partial \eta'} = \frac{1}{\rho'_{зр}\rho\cos\varphi}\left(\frac{\partial \Delta l}{\partial \varphi} + \rho'_{зр}\rho\sin\varphi\frac{1}{\rho'_{зр}}\left(\cos\varphi\frac{\partial \Delta l}{\partial \rho} - \frac{\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial \Delta l}{\partial \varphi}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{\rho'_{зр}\rho\cos\varphi}\frac{\partial \Delta l}{\partial \varphi} + \frac{\sin\varphi}{\rho'_{зр}}\frac{\partial \Delta l}{\partial \rho} - \frac{\sin^2\varphi}{\rho'_{зр}\rho\cos\varphi}\frac{\partial \Delta l}{\partial \varphi} =$$

$$= \frac{1}{\rho'_{зр}}\left(\sin\varphi\frac{\partial \Delta l}{\partial \rho} + \frac{\cos\varphi}{\rho}\frac{\partial \Delta l}{\partial \varphi}\right). \quad (6.155)$$

Тогда из формулы (6.149) для плоскости Гаусса получим следующие формулы поперечных аберраций при задании волновой аберрации в полярной системе координат:

$$\Delta g' = x'_0 - \vartheta' = \frac{p'}{\rho'_{зр}}\left(\cos\varphi\frac{\partial \Delta l}{\partial \rho} - \frac{\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial \Delta l}{\partial \varphi}\right);$$

$$\Delta G' = y'_0 = \frac{p'}{\rho'_{зр}}\left(\sin\varphi\frac{\partial \Delta l}{\partial \rho} + \frac{\cos\varphi}{\rho}\frac{\partial \Delta l}{\partial \varphi}\right). \quad (6.156)$$

Если волновая аберрация не зависит от φ и ϑ' (рис. 6.16), например $\Delta l(\rho) = C_1\rho^4 + B_1\rho^2 + D_1\rho^6$, то лучи, для которых $\rho = \rho_1$, будут пересекаться с плоскостью Гаусса в кольце радиусом $r'_0 = \sqrt{x'^2_0 + y'^2_0}$.

Подставив в эту формулу значения $\Delta g'$ и $\Delta G'$, получим

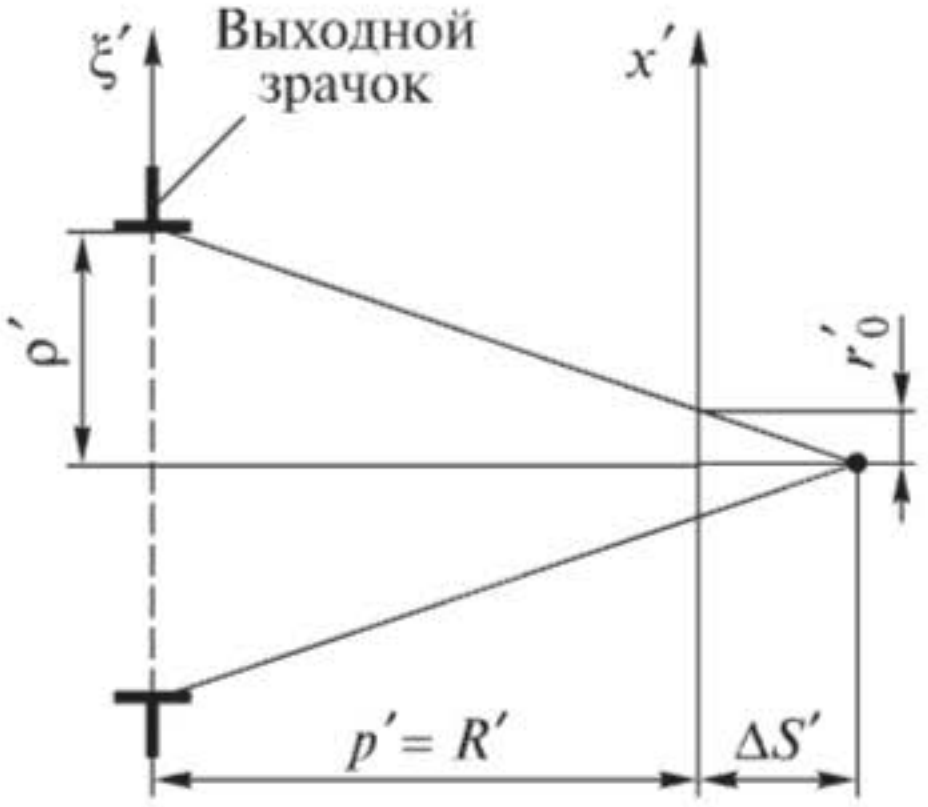


Рис. 6.16. Связь волновых аберраций с продольной и поперечной аберрациями для частного случая дефокусировки

$$r'_0 = \frac{p'}{\rho'_{зр}}\sqrt{\left(\cos\varphi\frac{\partial\Delta l}{\partial\rho} - \frac{\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial\Delta l}{\partial\varphi}\right)^2 + \left(\sin\varphi\frac{\partial\Delta l}{\partial\rho} + \frac{\cos\varphi}{\rho}\frac{\partial\Delta l}{\partial\varphi}\right)^2} =$$

$$= \frac{p'}{\rho'_{зр}}\frac{\partial\Delta l}{\partial\rho}\bigg|\rho = \rho_1 . \qquad (6.157)$$

Выразим для этого частного случая продольную аберрацию $\Delta S'$. Из построений на рис. 6.16 следует, что $\frac{\Delta S'}{r'_0} = \frac{R' + \Delta S'}{\rho'}$ и, так как $\Delta S' << R'$, то $\frac{\Delta S'}{r'_0} \approx \frac{R'}{\rho'}$.

Следовательно, продольную геометрическую аберрацию можно определить по формуле

$$\Delta S' = \frac{r'_0 R'}{\rho'} = \frac{R'^2}{\rho\rho'^2_{зр}}\frac{\partial\Delta l}{\partial\rho}\bigg|\rho = \rho_1 = \frac{p'^2}{\rho\rho'^2_{зр}}\frac{\partial\Delta l}{\partial\rho}\bigg|\rho = \rho_1 . \qquad (6.158)$$

6.3.6. Влияние монохроматических аберраций на когерентную передаточную функцию

Аберрации ОС приводят к отклонению формы реального волнового фронта от сферического. Аберрационные характеристики реального объектива задаются аберрационной функцией зрачка $P^{аб}_{зр}(\xi', \eta')$, которая описывает комплексный амплитудный коэффициент пропускания зрачка для изопланатической зоны. Согласно выражению (6.110), аберрационная функция зрачка, заданная в нормированных координатах $\xi_N = \xi'/\rho'_{зр}$ и $\eta_N = \eta'/\rho'_{зр}$, совпа-

дает с КПФ, заданной в нормированных частотах $\nu_{xN} = \nu_x / \nu_{xm}$ и $\nu_{yN} = \nu_y / \nu_{ym}$, т. е.

$$\tilde{h}^{\text{POC}}\left(\nu_{xN}, \nu_{yN}\right) = P_{\text{зр}}^{\text{аб}}\left(\nu_{xN}, \nu_{yN}\right). \qquad (6.159)$$

Область пространственных частот, которые пропускает объектив при когерентном излучении, определяется модулем КПФ, т. е.

$$\left|\tilde{h}^{\text{POC}}\left(\nu_{xN}, \nu_{yN}\right)\right| = P_{\text{зр}}\left(\nu_{xN}, \nu_{yN}\right). \qquad (6.160)$$

Таким образом, при когерентном освещении область пространственных частот, в пределах которой отсутствуют искажения модуля комплексной амплитуды, не зависит от аберраций ОС. Аберрации вносят лишь фазовые искажения в пределах частотной области пропускания ОС.

6.3.7. Влияние монохроматических аберраций на оптическую передаточную функцию

В качестве примера проведем анализ влияния волновой аберрации дефокусировки на ОПФ. Рассмотрим частный случай, когда имеется только одна аберрация — продольная дефокусировка, а выходной зрачок ОС имеет прямоугольную форму и смещен относительно оптической оси.

Определим сначала значение волновой аберрации при продольной дефокусировке для дифракционно-ограниченной ОС, из выходного зрачка которой выходит сферический волновой фронт (рис. 6.17). Волновую аберрацию вычисляем для точки $0'''$ плоскости наблюдения.

Примем следующие допущения:

1) излучение квазимонохроматическое;

2) относительное отверстие ОС мало;

3) продольная дефокусировка мала, т. е. $|\Delta L| << p'$.

Для задания функции волновой аберрации используем нормированные (относительные) координаты в плоскости выходного зрачка ОС:

$$\rho_N = \frac{\rho'}{\rho'_{\text{зр}}};\ \xi'^2 + \eta'^2 = \rho'^2;\ \xi'^2_m + \eta'^2_m = \rho'^2_{\text{зр}};\ \xi' = \rho'\cos\varphi;\ \eta' = \rho'\sin\varphi.$$

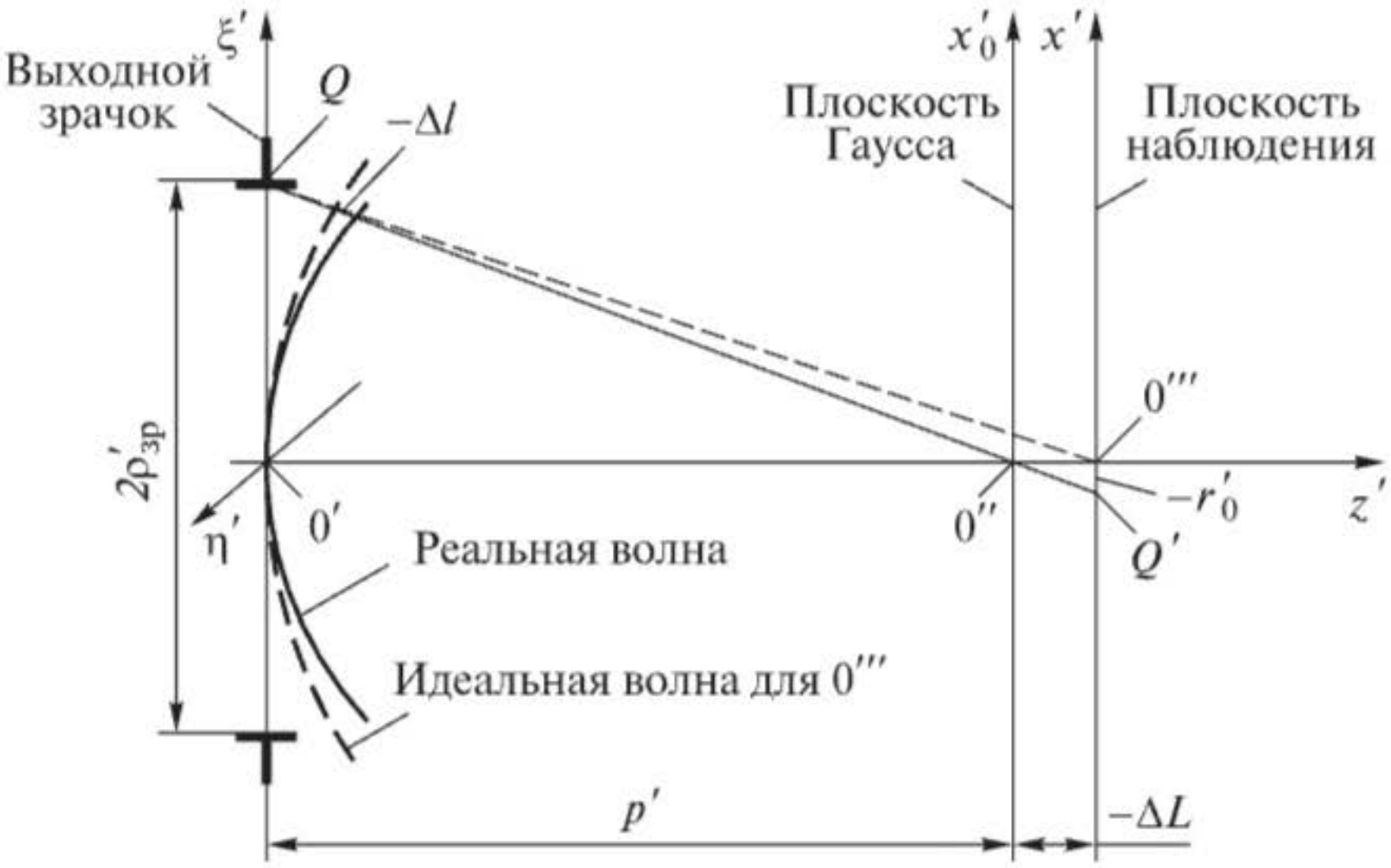


Рис. 6.17. Связь волновых и геометрических аберраций при продольной дефокусировке

Волновая аберрация дефокусировки $\Delta l(\rho_N)$ определяется выражением

$$\Delta l(\rho_N) = B_1 \rho_N^2, \tag{6.161}$$

где B_1 — постоянный коэффициент.

Как следует из формулы (6.157), поперечная геометрическая аберрация r' связана с волновой аберрацией зависимостью

$$r'(\rho_N) = \frac{p'}{\rho'_{зр}} \frac{\partial \Delta l}{\partial \rho_N}. \tag{6.162}$$

Для края зрачка волновая аберрация максимальна, и поперечная аберрация составит

$$r'_0 = \frac{p'}{\rho'_{зр}} 2B_1 \rho_N \Big|_{\rho_N = 1} = \frac{p'}{\rho'_{зр}} 2B_1. \tag{6.163}$$

Из подобия треугольников $Q0'0''$ и $Q'0'''0''$ (см. рис. 6.17) следует, что

$$\frac{r'_0}{\Delta L} = \frac{p' \cdot 2B_1}{\rho'_{зр} \Delta L} = \frac{\rho'_{зр}}{p'}, \tag{6.164}$$

где ΔL — продольная дефокусировка.

В результате получаем значение коэффициента волновой аберрации:

$$B_1 = \frac{\Delta L \rho'^2_{\text{зр}}}{2p'^2}. \tag{6.165}$$

С учетом формулы (6.165) волновую аберрацию дефокусировки можно записать в виде

$$\Delta l(\rho_N) = B_1 \rho_N^2 = \frac{\Delta L \rho'^2_{\text{зр}}}{2p'^2} \rho_N^2 = \frac{\Delta L \rho'^2}{2p'^2} =$$

$$= \frac{\Delta L(\xi'^2 + \eta'^2)}{2p'^2} = \frac{\Delta L \lambda^2}{2}(\nu_x^2 + \nu_y^2). \tag{6.166}$$

Вычислим ОПФ ОС с экранированным прямоугольным выходным зрачком (рис. 6.18). С учетом волновой аберрации дефокусировки аберрационная функция экранированного зрачка

$$P_{\text{зр}}^{\text{аб}}(\xi', \eta') =$$

$$= \text{rect}\left(\frac{\xi' - (\xi'_m - d)}{2d}\right)\text{rect}\left(\frac{\eta'}{2\eta'_m}\right)\exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\Delta L(\xi'^2 + \eta'^2)}{2p'^2}\right). \tag{6.167}$$

Выполнив замену переменных $\xi' = \lambda p' \nu'_x$ и $\eta' = \lambda p' \nu'_y$, получим

Рис. 6.18. Оптическая система с экранированным выходным зрачком

$$P_{\text{зр}}^{\text{аб}}(\lambda p'\nu'_x, \lambda p'\nu'_y =)$$

$$= P_{\text{зр}}(\lambda p'\nu'_x, \lambda p'\nu'_y \left(\frac{2\pi}{\lambda} i\Delta l\ \lambda p'\nu'_x(\ \lambda p'\nu'_y)\right) =$$

$$= \text{rect}\left(\frac{\nu'_x - (\nu'_{xm} - \nu'_{xd})}{2\nu'_{xd}}\right)\text{rect}\left(\frac{\nu'_y}{2\nu'_{ym}}\right)\exp\left(i\pi\Delta L\lambda\left(\nu'^2_x + \nu'^2_y\right)\right). \quad (6.168)$$

Комплексно-сопряженная аберрационная функция зрачка

$$P_{\text{зр}}^{\text{аб}*}\left(\lambda p'(\nu'_x + \nu_x),\ \lambda p'(\nu''_y + \nu_y)\right) =$$

$$= \text{rect}\left(\frac{\nu'_x + \nu_x - (\nu'_{xm} - \nu'_{xd})}{2\nu'_{xd}}\right)\text{rect}\left(\frac{\nu'_y + \nu_y}{2\nu'_{ym}}\right)\times$$

$$\times \exp\left(-i\pi\Delta L\lambda\left((\nu'_x + \nu_x)^2 + (\nu'_y + \nu_y)^2\right)\right), \quad (6.169)$$

где $\nu'_{xm} = \dfrac{\xi'_m}{\lambda p'};\ \nu'_{ym} = \dfrac{\eta'_m}{\lambda p'};\ \nu'_{xd} = \dfrac{d}{\lambda p'}.$

Для вычисления ОПФ используем формулу (6.134), которую представим в виде

$$\tilde{H}_N^{\text{ОС}}(\nu_x, \nu_y) =$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} P_{\text{зр}}^{\text{аб}}(\lambda p'\nu'_x, \lambda p'\nu'_y) P_{\text{зр}}^{\text{аб}*}(\lambda p'(\nu'_x + \nu_x), \lambda p'(\nu'_y + \nu_y))\, d\nu'_x d\nu'_y}{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} P_{\text{зр}}^{2}(\lambda p'\nu'_x, \lambda p'\nu'_y\ d\nu'_x d\nu'_y}. \quad (6.170)$$

Знаки «+» перед ν_x и ν_y означают, что при вычислении автоковариации для положительных значений ν_x и ν_y функцию $P_{\text{зр}}^{\text{аб}*}$ нужно смещать в отрицательных направлениях осей ν'_x и ν'_y, а для отрицательных значений ν_x и ν_y — в положительных направлениях осей ν'_x и ν'_y. Для прямоугольных зрачков интеграл автоковариации разделяется по переменным ν'_x и ν'_y. Выбор пределов интегрирования по ν'_x и ν'_y при вычислении автоковариации в формуле для ОПФ иллюстрирует рис. 6.19.

Числитель в выражении (6.170) имеет вид

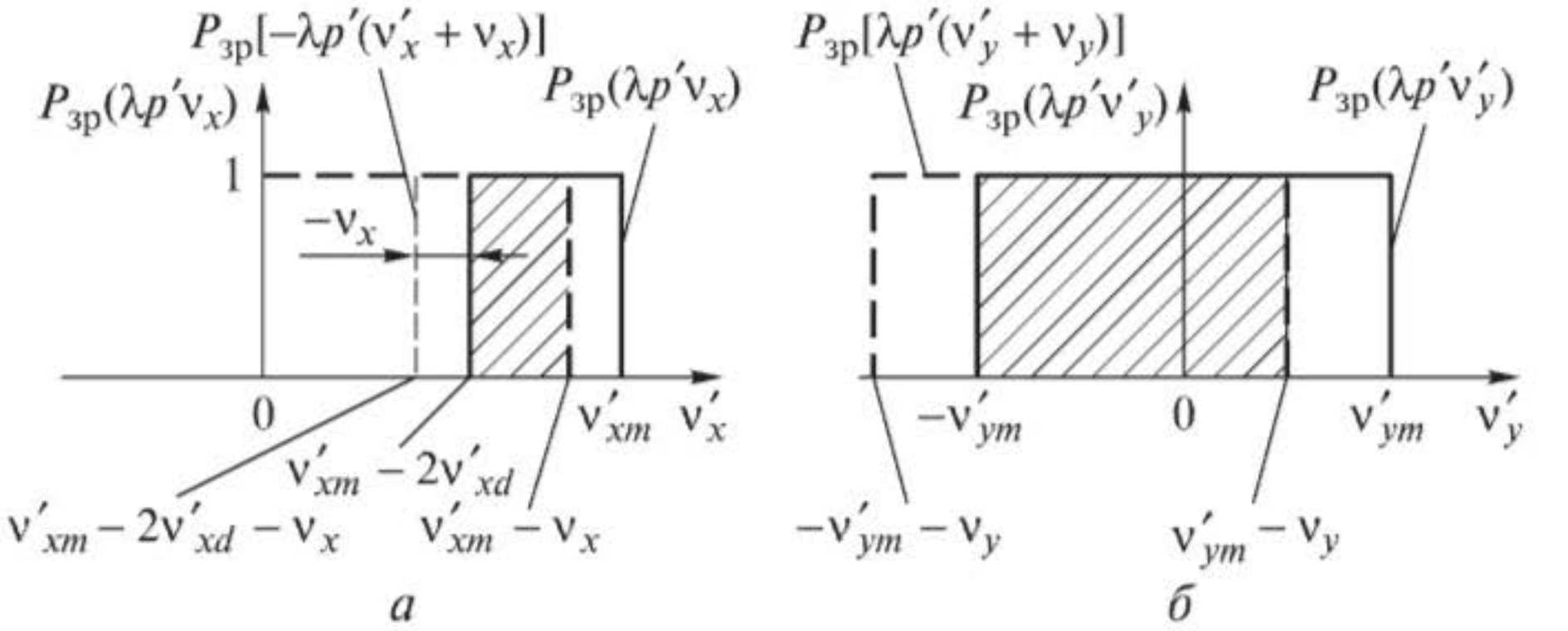


Рис. 6.19. К выбору пределов интегрирования

$$I(\nu_x, \nu_y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} P_{зр}^{аб}(\lambda p'\nu'_x, \lambda p'\nu'_y)\times$$

$$\times P_{зр}^{аб*}\left(\lambda p'(\nu'_x + \nu_x), \lambda p'(\nu'_y + \nu_y)\right)d\nu'_x d\nu'_y =$$

$$= \int_{\nu'_{xm}-2\nu'_{xd}}^{\nu'_{xm}-\nu_x} \exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\Delta L\lambda^2}{2}\nu'^2_x\right)\exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\Delta L\lambda^2}{2}(\nu'_x + \nu_x)^2\right)d\nu'_x \times$$

$$\times \int_{-\nu'_{ym}}^{\nu'_{ym}-\nu_y} \exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\Delta L\lambda^2}{2}\nu'^2_y\right)\exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\Delta L\lambda^2}{2}(\nu'_y + \nu_y)^2\right)d\nu'_y \cdot \qquad (6.171)$$

Выполнив интегрирование выражения (6.171), получим

$$I(\nu_x, \nu_y) = \exp\left(-i\cdot 2\pi\Delta L\lambda\nu_x\left(\nu'_{xm} - \nu'_{xd}\right)\right)\times$$

$$\times\left(2\nu'_{xd} - \nu_x\right)\mathrm{sinc}\left(\pi\Delta L\lambda\nu_x\left(2\nu'_{xd} - \nu_x\right)\right)\times$$

$$\times\left(2\nu'_{ym} - \nu_y\right)\mathrm{sinc}\left(\pi\Delta L\lambda\nu_y\left(2\nu'_{ym} - \nu_y\right)\right)\cdot \qquad (6.172)$$

Знаменатель в выражении (6.170) имеет вид

$$P_{зр}^2(\lambda p'\nu'_x, \lambda p'\nu'_y) = \int_{-\nu'_{ym}}^{\nu'_{ym}} 1d\nu'_y \int_{\nu'_{xm}-2\nu'_{xd}}^{\nu'_{xm}} 1d\nu'_x =$$

$$= \left(\nu'_{ym} + \nu'_{ym}\right)\left(\nu'_{xm} - \nu'_{xm} + 2\nu'_{xd}\right) = 2\nu'_{ym}\cdot 2\nu'_{xd}. \qquad (6.173)$$

Окончательно для ОПФ $\tilde{H}_N^{\text{ОС}}(\ _x\nu\ _y\nu\ )$ в области положительных и отрицательных значений пространственных частот ν_x и ν_y получим следующее выражение:

$$\tilde{H}_N^{\text{ОС}}(\nu_x,\nu_y)=\left(1-\frac{|\nu_x|}{2\nu'_{xd}}\right)\left(1-\frac{|\nu_y|}{2\nu'_{ym}}\right)\times$$

$$\times\operatorname{sinc}\left[\pi\Delta L\lambda\nu_x(2\nu'_{xd}-\nu_x)\right]\operatorname{sinc}\left[\pi\Delta L\lambda\nu_y(2\nu'_{ym}-\nu_y)\right]\times$$

$$\times\exp\left[-i\cdot 2\pi\Delta L\lambda\nu_x\left(\nu'_{xm}-\nu'_{xd}\right)\right]. \qquad (6.174)$$

Экспоненциальный множитель в формуле (6.174) описывает смещение изображения на $\Delta x'=\Delta L\lambda\left(\nu'_{xm}-\nu'_{xd}\right)$, которое возникает при наличии дефокусировки ОС с экранированием выходного зрачка.

Если экранирование зрачка отсутствует, т. е. $2d=2\xi'_m$ или $2\nu'_{xd}=2\nu'_{xm}$, то $\exp\left[-i\cdot 2\pi\Delta L\lambda\nu_x\left(\nu'_{xm}-\nu'_{xd}\right)\right]=1$ и ОПФ принимает вид

$$\tilde{H}_N^{\text{ОС}}(\nu_x,\nu_y)=\tilde{H}_N^{\text{ДОС}}(\nu_x,\nu_y)\times$$

$$\times\operatorname{sinc}\left[\pi\Delta L\lambda\nu_x\left(2\nu'_{xm}-\nu_x\right)\right]\operatorname{sinc}\left[\pi\Delta L\lambda\nu_y(2\nu'_{ym}-\nu_y)\right], \qquad (6.175)$$

где $\tilde{H}_N^{\text{ДОС}}(\nu_x,\nu_y)=\left(1-\frac{|\nu_x|}{2\nu'_{xm}}\right)\left(1-\frac{|\nu_y|}{2\nu'_{ym}}\right)$ — ОПФ дифракционно-ограниченной ОС с прямоугольным выходным зрачком.

Множитель $\operatorname{sinc}\left[\pi\Delta L\lambda\nu_x\left(2\nu'_{xm}-\nu_x\right)\right]\operatorname{sinc}\left[\pi\Delta L\lambda\nu_y(2\nu'_{ym}-\nu_y)\right]$ в выражении (6.175) описывает линейные искажения, обусловленные дефокусировкой ОС, приводящие к снижению контраста в формируемом изображении.

6.3.8. Влияние аподизации объектива на когерентную и оптическую передаточные функции

Качество изображения, формируемого некогерентной ОС, определяется ОПФ, которая зависит от размеров выходного зрачка, а также от аберраций. Кроме того, существует способ изменения вида ОПФ, заключающийся в создании заданного закона пропускания в пределах выходного зрачка ОС. Этот способ называется *аподизацией* ОС.

Проанализируем на конкретном примере возможность изменения вида ОПФ за счет аподизации выходного зрачка. Для упрощения вычислений рассмотрим одномерный случай, когда ОС представляют собой цилиндрический объектив, у которого отсутствуют аберрации, причем коэффициент пропускания в пределах зрачка описывается косинусоидальным законом. Тогда функция зрачка имеет вид

$$P_{\text{зр}}(\xi_N;\alpha)=\left[\alpha+(1-\alpha)\cos\left(\frac{\pi\xi_N}{2}\right)\right]\text{rect}\left(\frac{\xi_N}{2}\right), \qquad (6.176)$$

где α — параметр аподизации; $\xi_N=\dfrac{\xi'}{\xi'_m}=\dfrac{\xi}{\xi_m}=\dfrac{\nu_x}{\nu_{xm}}=\nu_{xN}$ — нормированная пространственная частота.

В соответствии с формулой (6.110) КПФ объективов описываются выражением

$$\tilde{h}_1(\nu_{xN};\alpha)=\left[\alpha+(1-\alpha)\cos\left(\frac{\pi\nu_{xN}}{2}\right)\right]\text{rect}\left(\frac{\nu_{xN}}{2}\right). \qquad (6.177)$$

Вычислим ОПФ цилиндрического объектива с косинусоидальным законом пропускания. Подставив выражение (6.177) в формулу (6.170), получим, что ОПФ отлична от нуля при $|\nu_{xN}|\le 2$ и имеет вид

$$\tilde{H}_N(\nu_{xN};\alpha)=\left[2\alpha^2\left(1-\frac{1}{2}|\nu_{xN}|\right)+\frac{4}{\pi}\alpha(1-\alpha)\left(1+\cos\frac{\pi}{2}\nu_{xN}\right)+\right.$$

$$\left.+(1-\alpha)^2\left(1-\frac{1}{2}|\nu_{xN}|+\frac{1}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}|\nu_{xN}|\right)\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\nu_{xN}\right)\right]\times$$

$$\times\frac{1}{\left[1-2\alpha+\dfrac{8}{\pi}\alpha(1-\alpha)+3\alpha^2\right]}. \qquad (6.178)$$

Для значений параметра аподизации α, равных 1; 0,5; 0, функции, описывающие ОПФ, можно записать в виде

$$\tilde{H}_N(\nu_{xN};1)=1-\frac{1}{2}|\nu_{xN}|;$$

$$\tilde{H}_N\left(\nu_{xN};\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8+3\pi}\left[2\pi\left(1-\frac{1}{2}|\nu_{xN}|\right)+4\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{2}\nu_{xN}\right)\right)+\right.$$

$$\left.+\pi\left(1-\frac{1}{2}|\nu_{xN}|+\frac{1}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}|\nu_{xN}|\right)\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\nu_{xN}\right)\right]; \qquad (6.179)$$

$$\tilde{H}_N(\nu_{xN};0)=\left(1-\frac{1}{2}|\nu_{xN}|+\frac{1}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}|\nu_{xN}|\right)\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\nu_{xN}\right).$$

Кривые, соответствующие этим функциям, приведены на рис. 6.20.

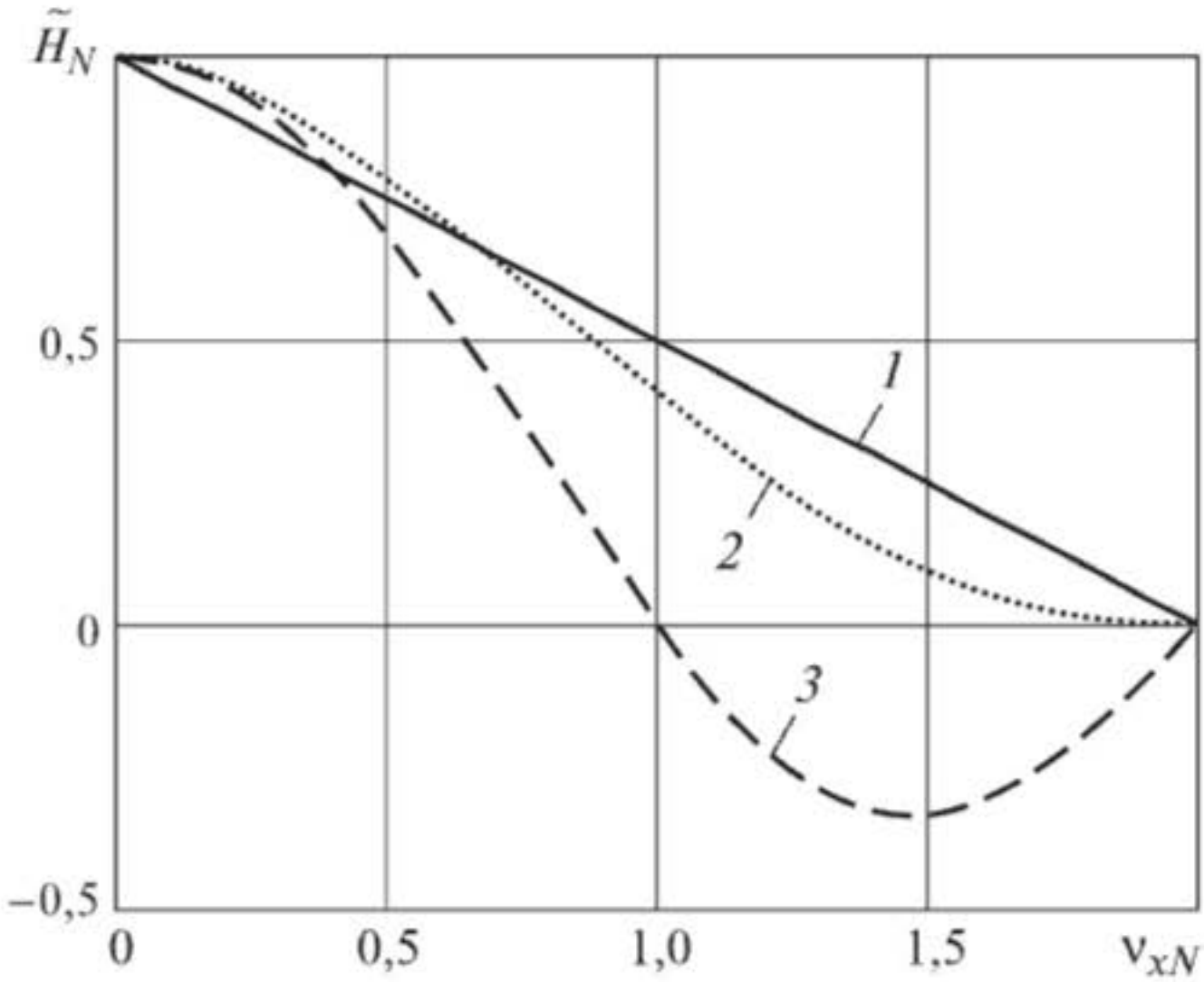


Рис. 6.20. Графики ОПФ при различных значениях параметра аподизации α:

$1-\tilde{H}_N(\nu_{xN};1)$; $2-\tilde{H}_N(\nu_{xN};\ ,0)5$;$3-\tilde{H}_N(\nu_{xN};0)$

На рисунке видно, что при $\alpha=1$ график ОПФ совпадает с графиком ОПФ дифракционно-ограниченной ОС, при $\alpha=0{,}5$ график имеет подъем на низких частотах, при $\alpha=0$ происходит обращение контраста высокочастотных составляющих спектра.

Из проведенного анализа следует, что за счет аподизации зрачка можно существенно изменять вид ОПФ, что может быть использовано для решения конкретных технических задач.

6.3.9. Аппроксимация функций рассеяния и передаточных функций оптических систем при некогерентном освещении

При проектировании ОЭП на этапе выполнения предварительных расчетов используют аппроксимацию функции рассеяния некогерентной ОС и соответствующей ОПФ. При этом принимают допущение, что принятое описание справедливо для средней длины волны λ рабочего спектрального диапазона ОЭП. Рассмотрим некоторые из наиболее часто используемых аппроксимаций нормированных НКФР и соответствующих ОПФ.

Прямоугольная нормированная НКФР может быть записана в следующем виде:

$$H_N(x', y') = H_0 \operatorname{rect}\left(\frac{x'}{a}, \frac{y'}{b}\right), \tag{6.180}$$

где a, b — параметры, определяющие размеры функции рассеяния.

Параметр H_0 определяется из условия нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H_N(x', y')dx'dy' = 1 = H_0 \int_{-a/2}^{a/2}\int_{-b/2}^{b/2} dx'dy' = H_0 ab. \tag{6.181}$$

Поскольку $H_0 = 1/ab$, то НКФР при такой аппроксимации имеет вид

$$H_N(x', y') = \frac{1}{ab}\operatorname{rect}\left(\frac{x'}{a}, \frac{y'}{b}\right). \tag{6.182}$$

Вычислив фурье-образ выражения (6.182), получим для ОПФ:

$$\tilde{H}_N(\nu_x, \nu_y) = \operatorname{sinc}(\pi a \nu_x)\operatorname{sinc}(\pi b \nu_y). \tag{6.183}$$

На рис. 6.21 представлен график сечения ОПФ при $\nu_y = 0$ и $a = 0{,}05$ мм.

Цилиндрическая нормированная НКФР имеет осевую симметрию и описывается выражением

$$H_N(r') = H_0 \operatorname{circ}\left(\frac{r'}{a}\right) = \begin{cases} H_0, & r' \le a; \\ 0, & r' > a, \end{cases} \tag{6.184}$$

где a — параметр, определяющий размер функции рассеяния.

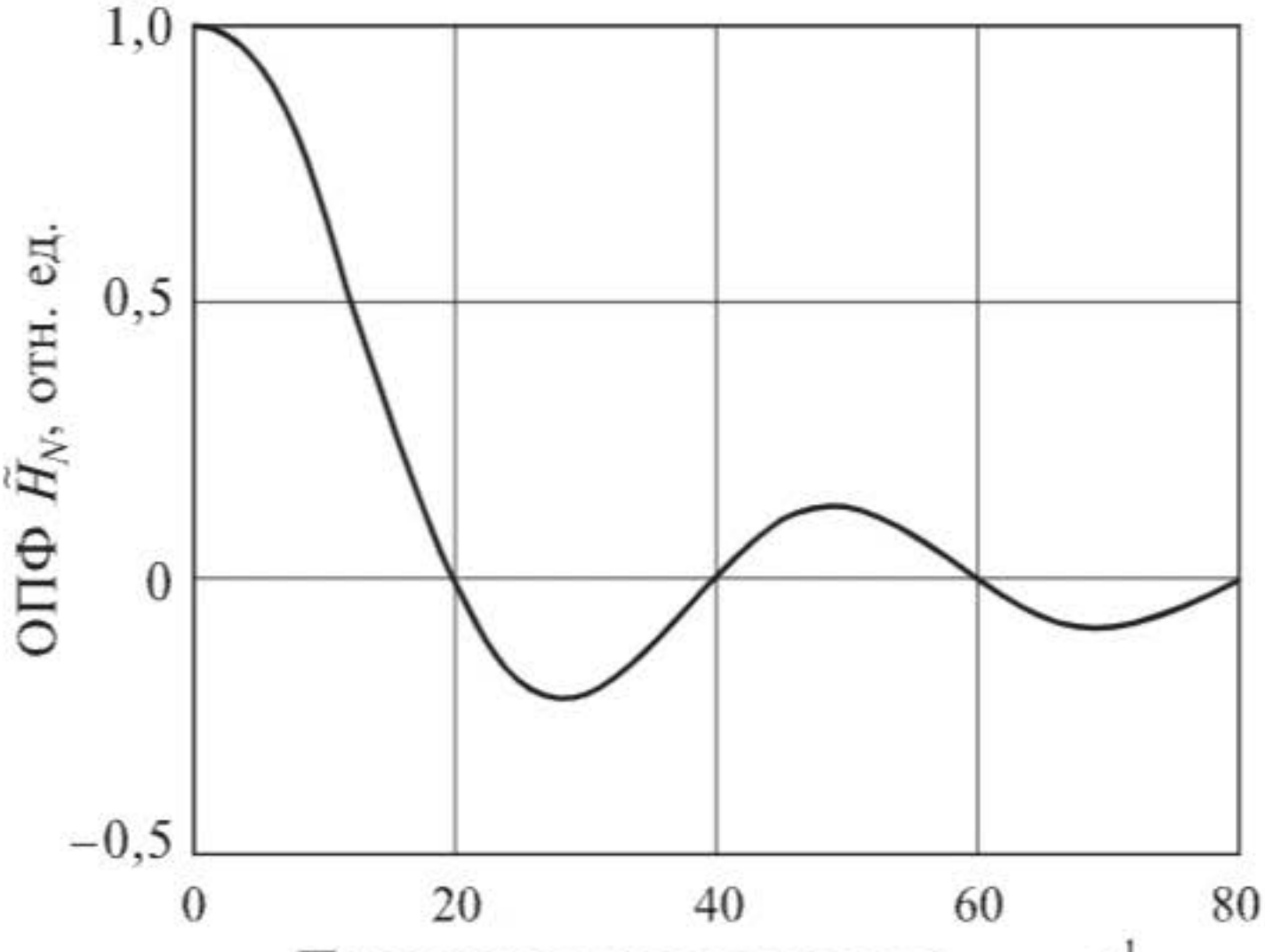


Рис. 6.21. График сечения ОПФ при аппроксимации НКФР прямоугольной функцией

Параметр H_0 определяется из условия нормировки:

$$\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} H_N(r')r'dr'd\varphi = 1 = H_0\int_0^{a}\int_0^{2\pi} r'dr'd\varphi = 2\pi H_0\frac{a^2}{2} = H_0\pi a^2. \qquad (6.185)$$

Поскольку $H_0 = \dfrac{1}{\pi a^2}$, то НКФР при такой аппроксимации имеет вид

$$H_N(r') = \frac{1}{\pi a^2}\mathrm{circ}\left(\frac{r'}{a}\right). \qquad (6.186)$$

Используя преобразование Ганкеля, для ОПФ получаем

$$\tilde{H}_N(\nu_r) = F_r\left\{\frac{1}{\pi a^2}\mathrm{circ}\left(\frac{r'}{a}\right)\right\} =$$

$$= \frac{a^2\pi}{\pi a^2}\frac{2I_1(2\pi a\nu_r)}{2\pi a\nu_r} = \mathrm{besinc}(2\pi a\nu_r), \qquad (6.187)$$

где $\mathrm{besinc}(2\pi\nu_r) = \dfrac{2I_1(2\pi\nu_r)}{2\pi\nu_r}$; $I_1(2\pi\nu_r)$ — функция Бесселя первого рода первого порядка.

На рис. 6.22 представлен график сечения ОПФ при $\nu_y = 0$ и $a = 0{,}05$ мм.

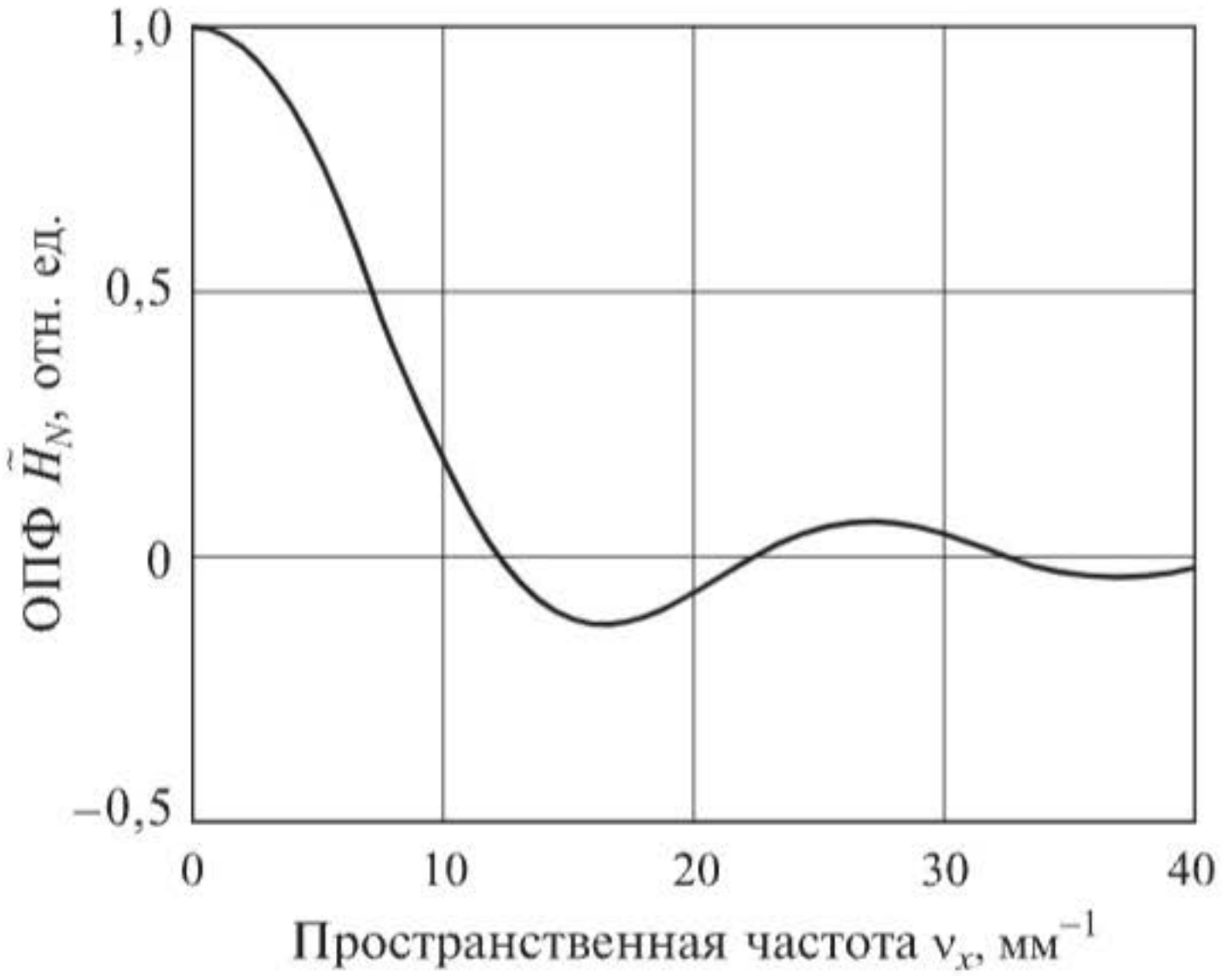


Рис. 6.22. График сечения ОПФ при аппроксимации НКФР цилиндрической функцией

Гауссова нормированная НКФР в декартовой системе координат определяется выражением

$$H_N(x', y') = \frac{1}{2\pi r_x r_y} \exp\left(-\frac{x'^2}{2r_x^2} - \frac{y'^2}{2r_y^2} \right), \qquad (6.188)$$

где r_x, r_y — параметры аппроксимации, характеризующие размеры пятна рассеяния по осям x' и y'.

Если принимается допущение о том, что пятно рассеяния имеет осевую симметрию, то НКФР можно представить в полярной системе координат одномерной функцией Гаусса:

$$H_N(r') = \frac{1}{2\pi r_0'^2} \exp\left(-\frac{r'^2}{2r_0'^2} \right), \qquad (6.189)$$

где r_0' — параметр, характеризующий размер пятна рассеяния. В пределах диаметра, равного $6r_0'$, содержится 99 % всей энергии в пятне рассеяния.

Вычислим выражение для ОПФ при аппроксимации НКФР функцией (6.188). Поскольку эта функция является функцией

с разделяющимися переменными, то достаточно вычислить одномерный фурье-образ, например по переменой x'. При вычислении используем известное соотношение для стандартной гауссоиды

$$F\left\{\exp\left(-\pi x^2\right)\right\} = \exp\left(-\pi \nu_x^2\right). \qquad (6.190)$$

С помощью теоремы масштабов получим

$$F_x\left\{\frac{1}{r_x'\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\pi\left(\frac{x}{r_x'\sqrt{2\pi}}\right)^2\right]\right\} = \exp\left[-\pi\left(\nu_x r_x'\sqrt{2\pi}\right)^2\right] =$$

$$= \exp\left(-2\pi^2 r_x'^2 \nu_x^2\right). \qquad (6.191)$$

Тогда ОПФ при аппроксимации НКФР двумерной гауссоидой вида (6.188) описывается выражением

$$\tilde{H}_N\left(\nu_x, \nu_y\right) = \exp\left[-2\pi^2\left(\nu_x^2 r_x'^2 + \nu_y^2 r_y'^2\right)\right]. \qquad (6.192)$$

На основании соотношения (6.191) для НКФР, имеющей осевую симметрию, ОПФ можно представить в виде

$$\tilde{H}_N\left(\nu_r\right) = \exp\left(-2\pi^2 r_0'^2 \nu_r^2\right). \qquad (6.193)$$

На рис. 6.23 приведен график сечения ОПФ при $\nu_y = 0$ и $r_0' = 0{,}02$ мм.

Косинусоидальная НКФР второго порядка описывается выражением

$$H_N(x', y') = \left[H_0 \cos^2\left(\pi\frac{x'}{l_x}\right)\cos^2\left(\pi\frac{y'}{l_y}\right)\right]\mathrm{rect}\left(\frac{x'}{l_x}, \frac{y'}{l_y}\right), \qquad (6.194)$$

где l_x, l_y — параметры, определяющие размер функции рассеяния, а значение параметра H_0 определяется из условия нормировки.

На практике обычно считают, что $l_x = l_y = l_0$, тогда выражение (6.194) принимает вид

$$H_N(x', y') = \left[H_0 \cos^2\left(\pi\frac{x'}{l_0}\right)\cos^2\left(\pi\frac{y'}{l_0}\right)\right]\mathrm{rect}\left(\frac{x'}{l_0}, \frac{y'}{l_0}\right). \qquad (6.195)$$

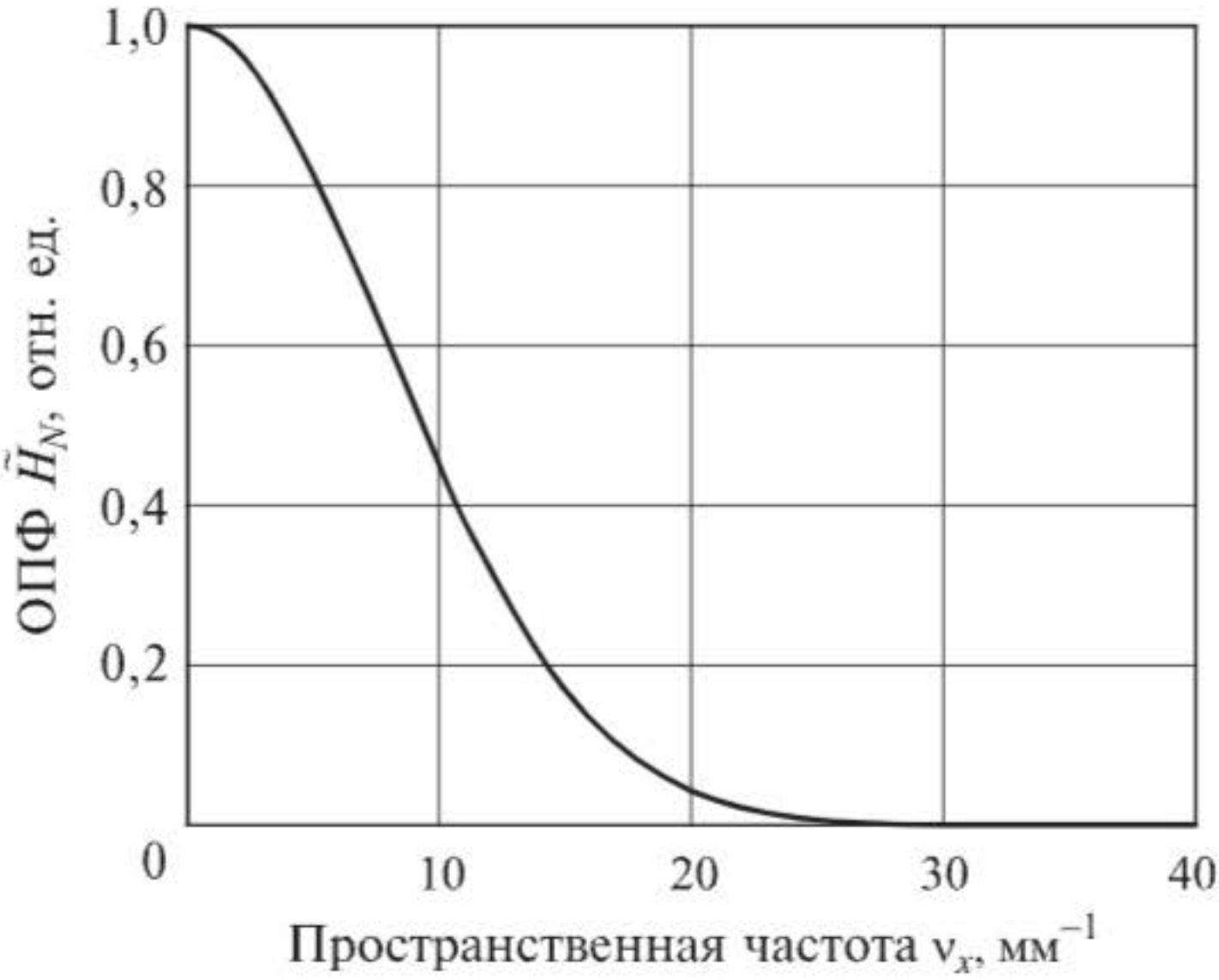


Рис. 6.23. График сечения ОПФ при аппроксимации НКФР функцией Гаусса

Нормирующий множитель определяется из условия

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H_N(x', y')\,dx'dy' = 1 =$$

$$= H_0 \int_{-l_0/2}^{l_0/2} \cos^2\left(\pi\frac{x'}{l_0}\right)dx' \int_{-l_0/2}^{l_0/2} \cos^2\left(\pi\frac{y'}{l_0}\right)dy'. \qquad (6.196)$$

Полученное выражение можно записать в виде квадрата одномерного интеграла, т. е.

$$1 = 4H_0\left(\int_0^{l_0/2} \cos^2\left(\pi\frac{x'}{l_0}\right)dx'\right)^2 =$$

$$= 4H_0\left(\frac{1}{2}\int_0^{l_0/2}\left(1+\cos\left(2\pi\frac{x'}{l_0}\right)\right)dx'\right)^2 =$$

$$= H_0\left(\frac{l_0}{2} + \frac{l_0}{2\pi}\sin\left(2\pi\frac{l_0}{2l_0}\right)\right)^2 = \frac{H_0 l_0^2}{4}. \qquad (6.197)$$

Следовательно, $H_0 = 4/l_0^2$.

С учетом H_0 НКРФ принимает вид

$$H_N(x', y') = \left[\frac{4}{l_0^2}\cos^2\left(\pi\frac{x'}{l_0}\right)\cos^2\left(\pi\frac{y'}{l_0}\right)\right]\mathrm{rect}\left(\frac{x'}{l_0}, \frac{y'}{l_0}\right). \quad (6.198)$$

Найдем ОПФ как фурье-образ от $H_N(x', y')$. Для этого представим $H_N(x', y')$ в следующем виде:

$$H_N(x', y') =$$

$$= \frac{4}{l_0^2}\left[\frac{1}{2}\left(1+\cos\left(2\pi\frac{x'}{l_0}\right)\right)\mathrm{rect}\left(\frac{x'}{l_0}\right)\right]\times$$

$$\times\left[\frac{1}{2}\left(1+\cos\left(2\pi\frac{x'}{l_0}\right)\right)\mathrm{rect}\left(\frac{y'}{l_0}\right)\right]. \quad (6.199)$$

Поскольку функция $H_N(x', y')$ разделяется по переменным, то справедливо выражение

$$\tilde{H}_N(\nu_x, \nu_y) = F_{x'y'}\{H_N(x', y')\} = F_{x'}\{H_N(x')\}F_{y'}\{H_N(y')\}. \quad (6.200)$$

Тогда можно записать

$$F_{x'}\{H_N(x')\} = \frac{2}{l_0}F_{x'}\left\{\left[\frac{1}{2}\left(1+\cos\left(2\pi\frac{x'}{l_0}\right)\right)\mathrm{rect}\left(\frac{x'}{l_0}\right)\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{l_0}\left[\delta(\nu_x)+\frac{1}{2}\left(\delta\left(\nu_x-\frac{1}{l_0}\right)+\delta\left(\nu_x+\frac{1}{l_0}\right)\right)\otimes l_0\mathrm{sinc}(\pi l_0\nu_x)\right] =$$

$$= \mathrm{sinc}(\pi l_0\nu_x)+\frac{1}{2}\mathrm{sinc}\left[\pi l_0\left(\nu_x-\frac{1}{l_0}\right)\right]+\frac{1}{2}\mathrm{sinc}\left[\pi l_0\left(\nu_x+\frac{1}{l_0}\right)\right],$$

$$F_{y'}\{H_N(y')\} = \mathrm{sinc}(\pi l_0\nu_y)+$$

$$+\frac{1}{2}\mathrm{sinc}\left[\pi l_0\left(\nu_y-\frac{1}{l_0}\right)\right]+\frac{1}{2}\mathrm{sinc}\left[\pi l_0\left(\nu_y+\frac{1}{l_0}\right)\right]. \quad (6.201)$$

На рис. 6.24 представлен график сечения ОПФ при $\nu_y = 0$ и $l_0 = 0{,}05$ мм.

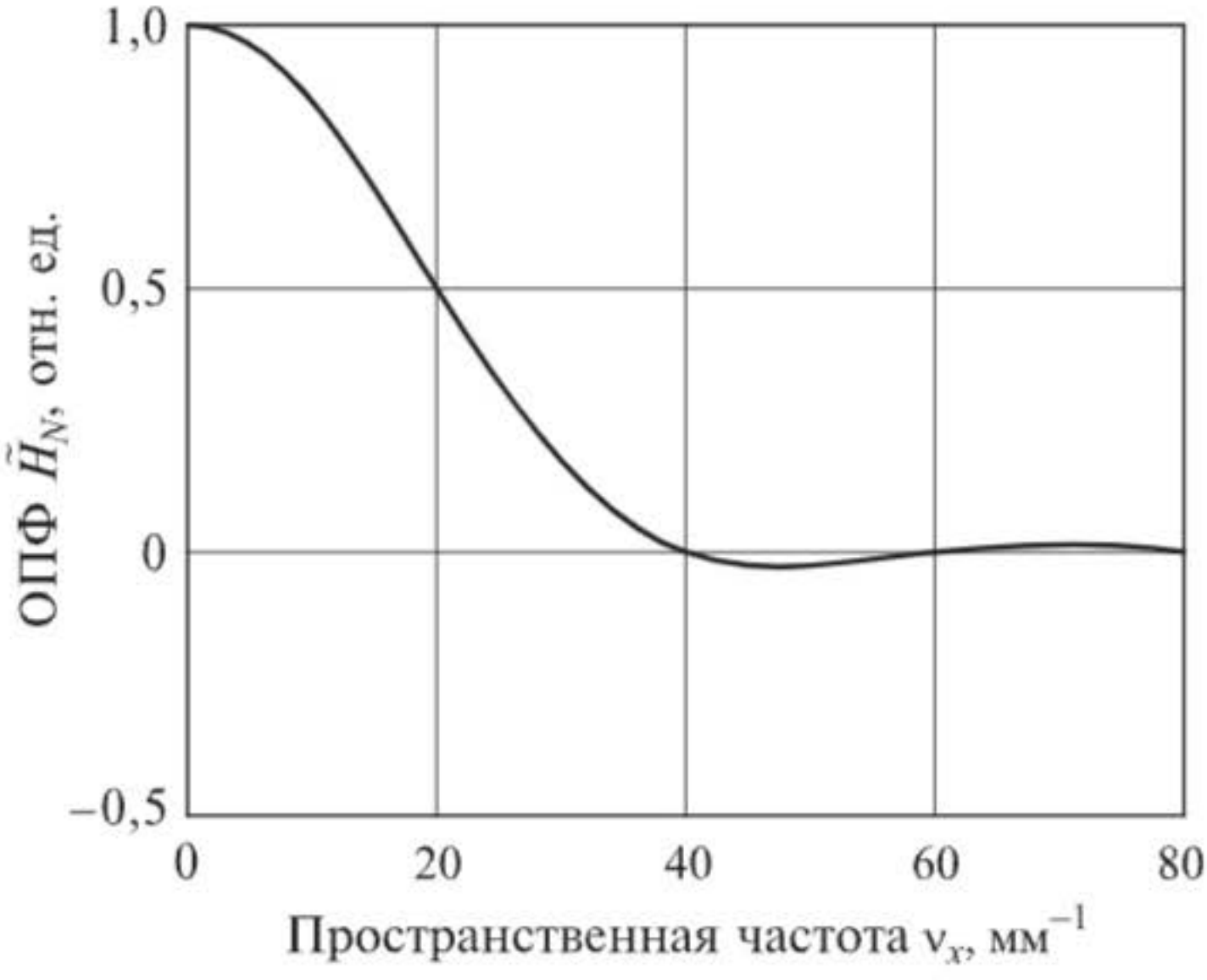


Рис. 6.24. График сечения ОПФ при аппроксимации НКФР косинусоидальной функцией второго порядка

6.3.10. Преобразование случайного поля яркости оптической системой

Статистические характеристики случайного поля яркости

Сигналы от объектов в реальных условиях регистрируются ОЭП при наличии естественных фоновых образований. В зависимости от назначения и области применения ОЭП фоны могут представлять собой разнообразные пейзажи, которые рассматривают как случайных поля, используя для описания статистические характеристики. Оптическое излучение фонов, как правило, является некогерентным, поэтому для описания преобразования случайных сигналов используют модель ОС при некогерентном освещении.

Рассмотрим математические модели излучения фонов, справедливые для относительно узких рабочих спектральных диапазонов. Как отмечалось выше, фоны отличаются большим разнообразием. Например, при регистрации земной поверхности с борта летательного аппарата реализации пространственного распределения яркости фона в виде городского пейзажа существенно отличаются от реализаций сельского пейзажа в виде леса или пашни. Еще большие отличия имеют реализации яркости от по-

верхности водоемов и прибрежной зоны. Поэтому при модельном описании фонов ограничиваются описанием случайных полей, реализации которых имеют одинаковые статистические характеристики, подчиняющиеся нормальному закону и образующие ансамбли, обладающие свойством однородности. Это позволяет строить математические модели фонов в рамках корреляционной теории. При таком допущении фоны описываются математическим ожиданием распределения яркости и корреляционной функцией, характеризующей флуктуации яркости относительно математического ожидания.

Границы между ансамблями, такими как линия горизонта или береговая линия, где происходит резкое изменение значений математического ожидания, значительно усложняют решение задачи различения объектов, находящихся вблизи зон резкого перепада яркости.

Для описания границ фоновых образований используют модельное математическое описание в виде «скачка» яркости — функцию Хевисайда:

$$L_X(x, y) = \begin{cases} L_1, & x \le 0; \\ L_2, & x > 0, \end{cases} \qquad (6.202)$$

где L_1, L_2 — математические ожидания в граничащих областях фона, $L_2 > L_1$.

В этой модели граница скачкообразного перехода между двумя уровнями яркости считается прямолинейной и расположенной вдоль оси y. Пространственно-частотный спектр данной модели фона определяется преобразованием Фурье от функции $L_X(x, y)$:

$$\tilde{L}_X(\nu_x, \nu_y) = F_{xy}\{L_X(x, y)\} =$$

$$= L_1\delta(\nu_x, \nu_y) + \Delta L\left(\frac{1}{2}\delta(\nu_x) + \frac{1}{i \cdot 2\pi\nu_x}\right)\delta(\nu_y), \qquad (6.203)$$

где параметр $\Delta L = L_2 - {}_1 L$ можно рассматривать как детерминированную или случайную величину.

Корреляционные функции и спектральные плотности — ПЧС случайного поля яркости фона — определяют путем статистической обработки экспериментальных данных, полученных при регистрации реализаций сигнала в заданном спектральном интер-

вале длин волн излучения. В частности, для аппроксимация ПЧС фона в виде облачных образований в ИК-диапазоне длин волн излучения используют [4] функцию вида

$$\tilde{K}r_L(\nu_x, \nu_y) = \frac{4\pi\xi_k\eta_k\sigma_L^2}{\left(1 + 4\pi^2\xi_k^2\nu_x^2 + 4\pi^2\eta_k^2\nu_y^2\right)^{3/2}}, \qquad (6.204)$$

где ξ_k, η_k — параметры аппроксимации, имеющие смысл интервалов корреляции по соответствующим осям координат; σ_L^2 — дисперсия яркости фона.

Различие между значениями параметров ξ_k и η_k характеризует степень анизотропии фона. При $\xi_k = \eta_k = \rho_k/\sqrt{2}$ получим выражение спектральной плотности изотропного поля

$$\tilde{K}r_L(\nu_r) = \frac{2\pi\rho_k^2\sigma_L^2}{\left(1 + 2\pi^2\rho_k^2\nu_r^2\right)^{3/2}}, \qquad (6.205)$$

где $\nu_r = \sqrt{\nu_x^2 + \nu_y^2}$.

Статистические характеристики фона для полихроматического излучения

Излучение фона, как и объекта, является функцией длины волны. Наибольшие помехи, например, системам пеленгации воздушных целей, создает дневной фон облачного неба и Земли. Фон является объемным источником излучения и на его характеристики излучения оказывают влияние эффекты рассеяния и поглощения в толще атмосферы. Поглощение атмосферы носит селективный характер, поэтому ИК-приборы работают в участках спектра, где атмосфера обладает достаточной прозрачностью.

В области длин волн излучения $\Delta\lambda = (\ 0\ 4...3$ мкм преобладает отраженное фоном излучение Солнца, Луны, звезд. В области $\lambda > 4$ мкм преобладает собственное тепловое излучение фона, которое определяется пространственным распределением температуры по поверхности фоновых образований. При относительно небольших по сравнению с математическим ожиданием флуктуациях температуры по поверхности фона можно принять допущение о независимости пространственного и спектрального (по длинам волн) распределений яркости. Тогда распределение спек-

тральной яркости реализаций фона описывается функцией с разделяющимися переменными

$$L_\lambda^{\Phi}(\lambda, x, y) \approx L_\lambda(\lambda)\ _{\text{отн}}L(x, y) \tag{6.206}$$

При таком допущении ПЧС случайного теплового фона можно представить в виде

$$\tilde{K}r_L\left(\lambda, \nu_x, \nu_y\right) = \sigma_L^2(\lambda)\tilde{K}r_N\left(\nu_x, \nu_y\right), \tag{6.207}$$

где $\sigma_L^2(\lambda)$ — дисперсия спектральной яркости фона в заданном спектральном диапазоне длин волн; $\tilde{K}r_N\left(\nu_x, \nu_y\right)$ — нормированный ПЧС фона.

Преобразование случайного квазимонохроматического поля яркости оптической системой

Пусть ОС, формирующая изображение однородного монохроматического случайного поля яркости фона (рис. 6.25), является пространственно-инвариантной, но имеет монохроматические аберрации.

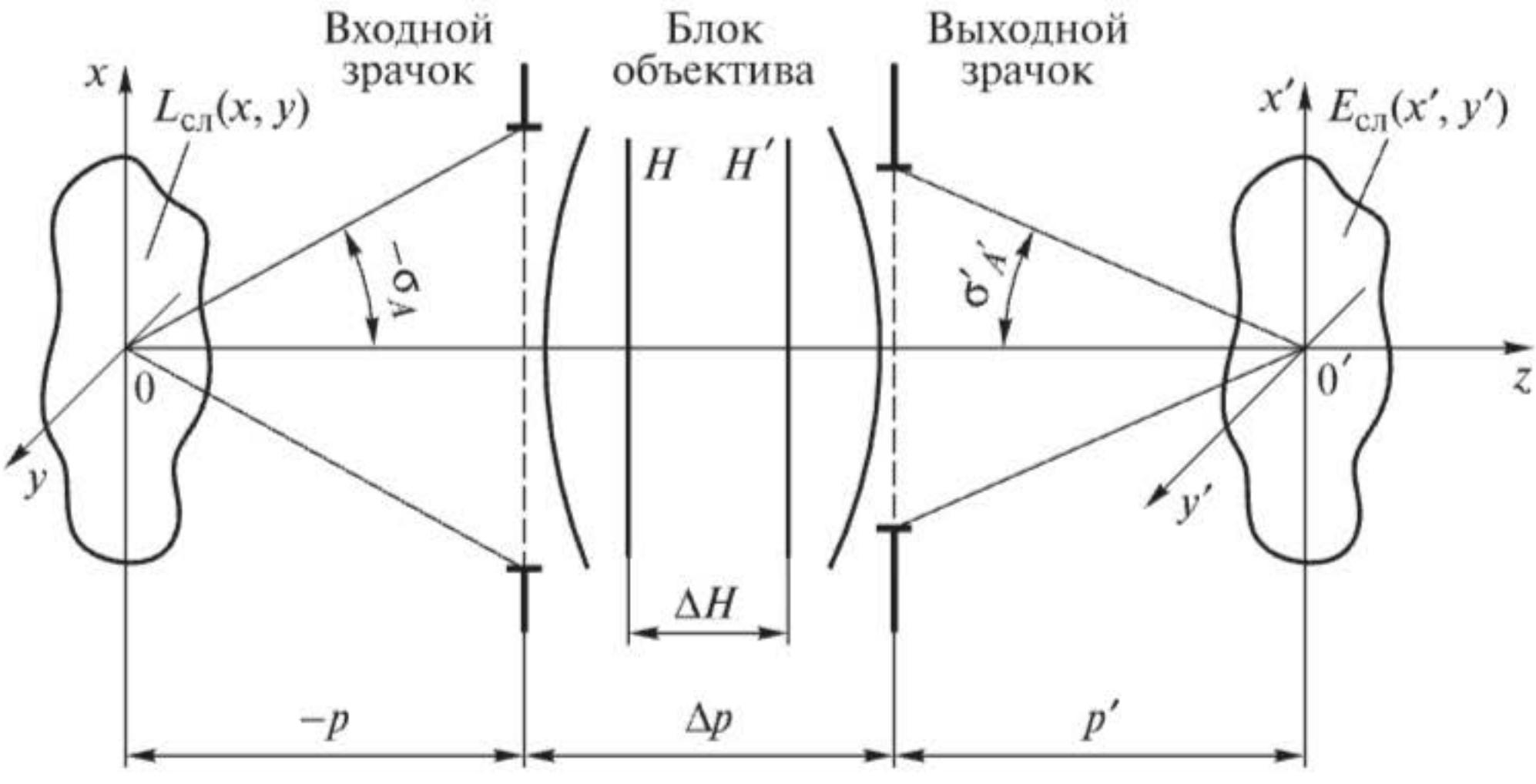


Рис. 6.25. Формирование ОС изображения случайного поля яркости фона

Тогда связь между реализацией случайного поля яркости и реализацией случайного поля облученности в плоскости изображения описывается интегралом свертки

$$E_\lambda^{\text{сл}}(x',\, y' \;\ni$$

$$= \pi\tau_{\text{ОС}} \sin^2 \sigma_A \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} L_\lambda^{\text{сл}}(x, y) H_N^{\text{РОС}}\left(x' - \beta x,\, y' - \beta y\right) dxdy =$$

$$= \pi\tau_{\text{ОС}} \sin \sigma_A \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left[\mathring{L}_\lambda(x, y) + m_L \right] H_N^{\text{РОС}}\left(x' - \beta x,\, y' - \beta y\right) dxdy. \quad (6.208)$$

Проведя замену переменных $u = x' - \beta x$ и $v = y' - \beta y$, получаем

$$E^{\text{сл}}\left(x', y'\right) =$$

$$= \frac{\pi\tau_{\text{ОС}} \sin\sigma_A^2}{\beta^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathring{L}_\lambda\left(\frac{x' - u}{\beta}, \frac{y' - v}{\beta} \right) H_N^{\text{РОС}}(u, v) dudv + \right.$$

$$\left. + m_L \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H_N^{\text{РОС}}(u, v) dudv \right], \quad (6.209)$$

где $\dfrac{\sin^2 \sigma_A}{\beta^2} = \sin^2 \sigma'_{A'}$; $\mathring{L}(x, y\ )$ — флуктуации случайного поля яркости относительно математического ожидания m_L случайного поля яркости; $\tau_{\text{ОС}}$ — коэффициент пропускания излучения ОС по интенсивности.

Если в уравнении (6.209) раскрыть скобки, то первое слагаемое

$$\mathring{E}_\lambda\left(x', y'\right) =$$

$$= \pi\tau_{\text{ОС}} \sin^2 \sigma'_{A'} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathring{L}_\lambda\left(\frac{x' - u}{\beta}, \frac{y' - v}{\beta} \right) H_N^{\text{РОС}}(u, v) dudv \quad (6.210)$$

описывает флуктуации поля облученности в изображении реализации случайного поля яркости фона, а второе слагаемое

$$m_E = \pi\tau_{\text{ОС}} \sin^2 \sigma'_{A'} m_L \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H_N^{\text{РОС}}(u, v) dudv = \pi\tau_{\text{ОС}} m_L \sin^2 \sigma'_{A'} \quad (6.211)$$

определяет значение математического ожидания поля облученности.

Корреляционная функция случайного поля облученности определяется выражением

$$Kr_E(\xi', \eta') = M\left[\overset{\circ}{E}_\lambda(x', y')\overset{\circ}{E}_\lambda(x' + \xi', y' + \eta')\right] =$$

$$= (\pi\tau_{OC}\sin\sigma'_{A'})^2 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H_N^{POC}(u_1, v_1) H_N^{POC}(u_2, v_2)\times$$

$$\times M\left[\overset{\circ}{L}_\lambda\left(\frac{x' - u_1}{\beta}, \frac{y' - v_1}{\beta}\right)\overset{\circ}{L}_\lambda\left(\frac{x' - u_2 + \xi'}{\beta}, \frac{y' - v_2 + \eta'}{\beta}\right)\right]\times$$

$$\times du_1 du_2 dv_1 dv_2. \qquad (6.112)$$

Поскольку случайное поле яркости однородно, то

$$M\left[\overset{\circ}{L}_\lambda\left(\frac{x' - u_1}{\beta}, \frac{y' - v_1}{\beta}\right)\overset{\circ}{L}_\lambda\left(\frac{x' - u_2 + \xi'}{\beta}, \frac{y' - v_2 + \eta'}{\beta}\right)\right] =$$

$$= Kr_L\left(\frac{\xi' + u_1 - u_2}{\beta}, \frac{\eta' + v_1 - v_2}{\beta}\right). \qquad (6.213)$$

Подставив соотношение (6.213) в (6.212), получим выражение для корреляционной функции случайного поля облученности в виде

$$Kr_E(\xi', \eta') =$$

$$= (\pi\tau_{OC}\sin\sigma'_{A'})^2 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} Kr_L\left(\frac{\xi' + u_1 - u_2}{\beta}, \frac{\eta' + v_1 - v_2}{\beta}\right)\times$$

$$\times H_N^{POC}(u_1, v_1) H_N^{POC}(u_2, v_2) du_1 du_2 dv_1 dv_2. \qquad (6.214)$$

Дисперсия случайного поля облученности определяется как

$$D_E = Kr^E(0, 0) =$$

$$= \left(\pi\tau_{OC}\sin^2\sigma'_{A'}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} Kr_L\left(\frac{u_1 - u_2}{\beta}, \frac{v_1 - v_2}{\beta}\right)\times$$

$$\times H_N^{POC}(u_1, v_1) H_N^{POC}(u_2, v_2) du_1 du_2 dv_1 dv_2. \qquad (6.215)$$

Из выражения (6.214) следует, что линейная пространственно-инвариантная ОС не нарушает однородности случайного поля облученности.

Вычислим ПЧС — спектральную плотность случайного поля облученности. Взяв преобразование Фурье, получим

$$\tilde{K}r_E\left(\nu_x, \nu_y\right) = F_{\xi'\eta'}\left\{Kr_E\left(\xi', \eta'\right)\right\} =$$

$$= \left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} Kr_L\left(\frac{\xi' + u_1 - u_2}{\beta}, \frac{\eta' + v_1 - v_2}{\beta}\right)\times\right.$$

$$\times H_N^{\text{POC}}\left(u_1, v_1\right) H_N^{\text{POC}}\left(u_2, v_2\right)\exp\left[-i\cdot 2\pi\left(\nu_x\xi' + \nu_y\eta'\right)\right]\times$$

$$\left.\times\, du_1 du_2 dv_1 dv_2 d\xi' d\eta'\right] \qquad (6.216)$$

или

$$\tilde{K}r_E\left(\nu_x, \nu_y\right) = \left(\pi\tau_{\text{OC}}\sin^2\sigma'_{A'}\right)^2 \times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H_N^{\text{POC}}\left(u_1, v_1\right)du_1 dv_1 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H_N^{\text{POC}}\left(u_2, v_2\right)du_2 dv_2 \times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} Kr_L\left(\frac{\xi' + u_1 - u_2}{\beta}, \frac{\eta' + v_1 - v_2}{\beta}\right)\times$$

$$\times\exp\left[-i\cdot 2\pi\left(\nu_x\xi' + \nu_y\eta'\right)\right]d\xi' d\eta'. \qquad (6.217)$$

Выполнив замену переменных $p = \xi' - u_2 + u_1$ и $q = \eta' - v_2 + v_1$, получим

$$\tilde{K}r_E\left(\nu_x, \nu_y\right) = \left(\pi\tau_{\text{OC}}\sin^2\sigma'_{A'}\right)^2 \times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H_N^{\text{POC}}\left(u_1, v_1\right)\exp\left[-i\cdot 2\pi\left(\nu_x u_1 + \nu_y v_1\right)\right]du_1 dv_1 \times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H_N^{\text{POC}}\left(u_2, v_2\right)\exp\left[i\cdot 2\pi\left(\nu_x u_2 + \nu_y v_2\right)\right]du_2 dv_2 \times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} Kr_L\left(\frac{p}{\beta}, \frac{q}{\beta}\right)\exp\left[-i\cdot 2\pi\left(\nu_x p + \nu_y q\right)\right]dpdq =$$

$$= \left(\pi\tau_{\text{OC}}\beta\sin^2\sigma'_{A'}\right)^2 \tilde{K}r_L\left(\beta\nu_x, \beta\nu_y\right)\tilde{H}_N^{\text{POC}}\left(\nu_x, \nu_y\right)\times$$

$$\times\,\tilde{H}_N^{\text{POC}}\left(-\nu_x, -\nu_y\right), \qquad (6.218)$$

где

$$\tilde{K}r_L(\nu_x, \nu_y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} Kr_L(p, q)\exp\left[-i\cdot 2\pi\left(\nu_x p + \nu_y q\right)\right]dpdq;$$

$$\tilde{H}_N^{\text{POC}}(\nu_x, \nu_y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H_N^{\text{POC}}(u_1, v_1)\exp\left[-i\cdot 2\pi\left(\nu_x u_1 + \nu_y v_1\right)\right]du_1 dv_1;$$

$$\tilde{H}_N^{\text{POC}}(-\nu_x, -\nu_y) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H_N^{\text{POC}}(u_2, v_2)\exp\left[-i\cdot 2\pi\left((-\nu_x)u_2 + (-\nu_y)v_2\right)\right]du_2 dv_2.$$

Поскольку $H_N^{\text{POC}}(x', y')$ — действительная функция, для которой выполняется равенство $\tilde{H}_N^{\text{POC}}(-\nu_x, -\nu_y) = \tilde{H}_N^{*\text{POC}}(\nu_x, \nu_y)$, то окончательно выражение (6.218) принимает следующий вид:

$$\tilde{K}r_E(\nu_x, \nu_y) =$$

$$= \left(\pi\tau_{\text{OC}}\beta\sin^2\sigma'_{A'}\right)^2 \tilde{K}r_L(\beta\nu_x, \beta\nu_y)\left|\tilde{H}_N^{\text{POC}}(\nu_x, \nu_y)\right|^2. \quad (6.219)$$

Частный случай. Если ОС идеальная, т. е. $H_N^{\text{POC}}(x', y') = \delta(x', y')$, то

$$Kr_E(\xi', \eta') =$$

$$= \left(\pi\tau_{\text{OC}}\sin\sigma'_{A'}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} Kr_L\left(\frac{\xi' + u_1 - u_2}{\beta}, \frac{\eta' + v_1 - v_2}{\beta}\right)\times$$

$$\times\,\delta(u_1, v_1)\delta(u_2, v_2)du_1 du_2 dv_1 dv_2 = \left(\pi\tau\sin^2\sigma'_{A'}\right)^2 Kr_L\left(\frac{\xi'}{\beta}, \frac{\eta'}{\beta}\right), \quad (6.220)$$

где $Kr_L\left(\frac{\xi'}{\beta}, \frac{\eta'}{\beta}\right)$ — корреляционная функция случайного поля яркости, приведенная к плоскости изображения. В этом случае спектральная плотность случайного поля облученности определяется выражением

$$\tilde{K}r_E(\nu_x, \nu_y) = \left(\pi\tau_{\text{OC}}\beta\sin^2\sigma'_{A'}\right)^2 \tilde{K}r_L(\beta\nu_x, \beta\nu_y). \quad (6.221)$$

Выражение поля облученности в угловых координатах

Если пространство предметов, где находятся объект и фон, расположено в бесконечности ($f' << L_D$), то приближенно можно считать, что плоскость изображения совпадет с задней фокальной плоскостью ОС. В этом случае сигнал на входе и выходе ОС целесообразно описывать функциями, заданными в угловых координатах. Для малых значений углового поля угловые координаты приближенно можно представить в виде

$$\theta_x \approx \operatorname{tg}\theta_x = \frac{x}{L_D} = \frac{\beta x}{f'} = \frac{x'}{f'} = \theta'_x;$$
$$\theta_y \approx \operatorname{tg}\theta_y = \frac{\beta y}{f'} = \frac{y'}{f'} = \theta'_y, \qquad (6.222)$$

где L_D — расстояние от пространства предметов до входного зрачка ОС.

Для детерминированного поля облученности, заданного в угловых координатах, и его ПЧС получим следующие выражения:

$$E_\lambda\left(\theta'_x, \theta'_y\right) = \pi\tau_{\text{ОС}}\sin^2\sigma'_{A'} \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} L_\lambda\left(\theta_x, \theta_y\right) H_N^{\text{РОС}}\left(\theta'_x - \theta_x, \theta'_y - \theta_y\right) d\theta_x d\theta_y; \qquad (6.223)$$

$$\tilde{E}_\lambda\left(\nu_{\theta x}, \nu_{\theta y}\right) = \pi\tau_{\text{ОС}}\sin^2\sigma'_{A'}\tilde{L}_\lambda\left(\nu_{\theta x}, \nu_{\theta y}\right)\tilde{H}_N^{\text{РОС}}\left(\nu_{\theta x}, \nu_{\theta y}\right). \qquad (6.224)$$

Случайное поле облученности и случайное поле яркости связаны между собой интегралом свертки, который имеет вид

$$E_\lambda^{\text{сл}}\left(\theta'_x, \theta'_y\right) = \pi\tau_{\text{ОС}}\sin^2\sigma'_{A'} \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} L_\lambda^{\text{сл}}\left(\theta_x, \theta_y\right) H_N^{\text{РОС}}\left(\theta'_x - \theta_x, \theta'_y - \theta_y\right) d\theta_x d\theta_y =$$
$$= \pi\tau_{\text{ОС}}\sin^2\sigma'_{A'} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} L_\lambda^{\text{сл}}\left(\theta'_x - \theta_x, \theta'_y - \theta_y\right) H_N^{\text{РОС}}\left(\theta_x, \theta_y\right) d\theta_x d\theta_y. \qquad (6.225)$$

Для однородного случайного поля яркости интеграл свертки можно записать в следующем виде:

$$E_\lambda^{\text{сл}}\left(\theta'_x, \theta'_y\right) = \pi\tau_{\text{ОС}} \sin^2 \sigma'_{A'} \times$$

$$\times\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \overset{\circ}{L}_\lambda\left(\theta'_x - \theta_x, \theta'_y - \theta_y\right) H_N^{\text{РОС}}\left(\theta_x, \theta_y\right) d\theta_x d\theta_y + \right.$$

$$\left. + m_L \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H_N^{\text{РОС}}\left(\theta_x, \theta_y\right) d\theta_x d\theta_y \right] =$$

$$= \overset{\circ}{E}_\lambda\left(\theta'_x, \theta'_y\right) + \pi\tau_{\text{ОС}} \sin^2 \sigma'_{A'} m_L. \qquad (6.226)$$

Отсюда получаем выражение для математического ожидания поля облученности:

$$m_E = \pi\tau_{\text{ОС}} \sin^2 \sigma'_{A'} m_L. \qquad (6.227)$$

Корреляционная функция случайного поля облученности в угловых координатах определяется как

$$Kr_E\left(\mu'_x, \mu'_y\right) = M\left[\overset{\circ}{E}_\lambda\left(\theta'_x, \theta'_y\right)\overset{\circ}{E}_\lambda\left(\theta'_x + \mu'_x, \theta'_x + \mu'_x\right)\right], \qquad (6.228)$$

где $\mu'_x = \theta'_{x2} - \theta'_{x1}$, $\mu'_y = \theta'_{y2} - \theta'_{y1}$.

Подставив $\overset{\circ}{E}_\lambda\left(\theta'_x, \theta'_y\right)$ и $\overset{\circ}{E}_\lambda\left(\theta'_x + \mu'_x, \theta'_y + \mu'_y\right)$ в формулу (6.228), получим

$$Kr_E\left(\mu'_x, \mu'_y\right) = \left(\pi\tau_{\text{ОС}} \sin^2 \sigma'_{A'}\right)^2 \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} Kr_L\left(\mu'_x + \theta_{x1} - \theta_{x2}, \mu'_y + \theta_{y1} - \theta_{y2}\right) \times$$

$$\times H_N^{\text{РОС}}\left(\theta_{x1}, \theta_{y1}\right) H_N^{\text{РОС}}\left(\theta_{x2}, \theta_{y2}\right) d\theta_{x1} d\theta_{y1} d\theta_{x2} d\theta_{y2}. \qquad (6.229)$$

Спектральная плотность случайного поля облученности в угловых пространственных частотах имеет вид

$$\tilde{K}r_E\left(\nu_{\theta x}, \nu_{\theta y}\right) =$$

$$= \left(\pi\tau_{\text{ОС}} \sin^2 \sigma'_{A'}\right)^2 \tilde{K}r_L\left(\nu_{\theta x}, \nu_{\theta y}\right)\left|\tilde{H}_N^{\text{РОС}}\left(\nu_{\theta x}, \nu_{\theta y}\right)\right|^2, \qquad (6.230)$$

где $\nu_{\theta x} = \nu'_{\theta x} = L_D / T_x = f' / T'_x$, $\nu_{\theta y} = \nu'_{\theta y} = L_D / T_y = f' / T'_y$ — угловые пространственные частоты, рад$^{-1}$; $T'_x = \beta T$, $T'_y = \beta T_y$ — пространственные периоды; $\beta = f' / L_D$ — линейное увеличение.

6.4. Размерности физических величин, описывающих детерминированные и случайные оптические сигналы

Размерности детерминированных сигналов

Когерентное излучение:

- интенсивность излучения $I(x, y)I'(x' y')$ – Вт/м^2 ;
- амплитуда волны $A(x, y), A'(x' y')$ – Вт$^{1/2}$/м ;
- когерентная функция рассеяния

$h_\beta(x', y'), \; h(x', y') = \frac{1}{\beta} h_\beta(x', y')$ — м$^{-2}$;

- амплитуда волны в плоскости изображения

$$A'(x', y') = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(x, y) h_\beta(x' - \beta x, y' - \beta y) dx dy \text{ — Вт}^{1/2}/\text{м};$$

- когерентная передаточная функция $\tilde{h}(\nu_x, \nu_y)$ — отн. ед.;
- пространственно-частотный спектр амплитуды волны $\tilde{A}(\nu_x, \nu_y), \; \tilde{A}'(\nu_x, \nu_y)$ — Вт$^{1/2}$м.

Некогерентное квазимонохроматическое излучение

В линейных координатах:

- яркость $L(x, y)$ — Вт/(м^2 · ср);
- светимость $M(x, y)$ — Вт/м^2 ;
- облученность $E(x', y')$ — Вт/м^2, причем

$$E(x', y') = \pi \tau_{\text{ОС}} \sin^2 \sigma_A \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} L(x, y) H_N^{\text{РОС}}(x' - \beta x \; y' - \beta y) dx dy \; ;$$

- нормированная некогерентная функция рассеяния $H_N^{\text{РОС}}(x', y')$ — м$^{-2}$;
- пространственно-частотный спектр яркости $\tilde{L}(\nu_x, \nu_y)$ — Вт/ср;

• пространственно-частотный спектр светимости, облученности $\tilde{M}(\nu_x, \nu_y)$, $\tilde{E}(\nu_x, \nu_y)$ — Вт;

• оптическая передаточная функция $\tilde{H}_N^{\text{РОС}}(\nu_x, \nu_y)$ — отн. ед.

В угловых координатах:

• облученность $E(\theta'_x, \theta'_y)$ — Вт/рад^2, причем

$$E(\theta'_x, \theta'_y) = \pi\tau\sin^2\sigma'_{A'} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} L(\theta_x, \theta_y) H_N^{\text{РОС}}(\theta'_x - \theta_x, \theta'_y - \theta_y) d\theta_x d\theta_y;$$

• яркость $L(\theta_x, \theta_y)$ — Вт/(рад^2 · ср);

• нормированная некогерентная функция рассеяния $H_N^{\text{РОС}}(\theta'_x, \theta'_y)$ — 1/рад^2;

• ПЧС углового распределения яркости $\tilde{L}(\nu_{\theta x}, \nu_{\theta y})$ — Вт/ср;

• ПЧС углового распределения облученности $\tilde{E}(\nu_{\theta x}, \nu_{\theta y})$ — Вт.

Размерности случайных сигналов при квазимонохроматическом излучении

В линейных координатах:

• случайная реализация яркости $L^{\text{сл}}(x, y)$ — Вт/(м^2 ср);

• случайная реализация светимости, облученности $M^{\text{сл}}(x, y)$, $E^{\text{сл}}(x' y')$ — Вт/м^2;

• математическое ожидание яркости, облученности m_L — Вт/(м^2 · ср), m_E — Вт/м^2;

• корреляционная функция яркости $Kr_L(\xi, \eta)$ — Вт^2/(м^4 · ср^2);

• корреляционная функция облученности $Kr_E(\xi', \eta')$ — Вт^2/м^4;

• дисперсии яркости, облученности $D_L = Kr_L(\ ,0\ 0)$ — Вт /(м ср), $D_E = Kr_E\ (\ 0\ 0)$ — Вт /м ;

• ПЧС случайного поля яркости $\tilde{K}r_L(\nu_x, \nu_y)$ — Вт^2/(м^2 · ср^2).

В угловых координатах:

• корреляционная функция и ПЧС случайного поля облученности $Kr_E(\mu'_x, \mu'_y)$ — Вт^2/рад^4, $\tilde{K}r_E(\nu_{\theta x}, \nu_{\theta y})$ — Вт^2/рад^2,

где $\nu_{\theta x}, \nu_{\theta y} \rightarrow [\text{рад}^{-1}]$ — угловые пространственные частоты.

7. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ОПТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ МОДУЛЯТОРОМ АНАЛИЗАТОРА ИЗОБРАЖЕНИЯ

7.1. Назначение и принцип действия модулятора анализатора изображения

Анализатором изображения (АИ) называют [4, 5] совокупность устройств, входящих в состав ОЭП, которые выполняют обработку сигнала в целях извлечения информации об объектах, содержащейся в формируемом ОС изображении. В общем случае в состав АИ входят: модулятор анализатора изображения (МАИ), приемник излучения и электронный тракт. Вид и состав АИ в значительной степени зависят от назначения ОЭП и используемой элементной базы. Следует отметить, что МАИ как элемент ОЭП впервые стали использовать в пеленгаторах информационного и следящего типов.

Основной функцией МАИ является модуляция оптического сигнала, в процессе которой в параметрах оптического сигнала в виде потока излучения кодируется информация об объектах, в частности об их угловых координатах. В зависимости от назначения ОЭП с помощью МАИ могут быть реализованы следующие виды модуляции:

• непрерывная временна́я модуляция, информация об объекте кодируется в амплитуде, фазе или частоте потока излучения;

• различные виды временно́й импульсной модуляции (амплитудно-импульсная, широтно-импульсная и др.);

• пространственная импульсная модуляция.

Модулированный поток излучения преобразуется ПИ в электрический сигнал, а затем в электронном тракте ОЭП осуществляется демодуляция (детектирование) сигнала для извлечения информации, закодированной в параметрах сигнала при модуляции.

Кроме модуляции, важной функцией МАИ является пространственная фильтрация, которая выполняется в целях селек-

ции оптического сигнала от объектов при наличии пространственно неравномерного случайного фона.

В качестве МАИ используют неподвижные и подвижные транспаранты, которые располагаются в плоскости изображения ОС. Неподвижные транспаранты характеризуются функцией пропускания, которая в общем случае определяется выражением

$$H_{\tau}^{\text{МАИ}}(\lambda, x_{\text{м}}, y_{\text{м}}) = \tau_{\text{МАИ}}(\lambda) H^{\text{МАИ}}(x_{\text{м}}, y_{\text{м}}), \qquad (7.1)$$

где $\tau^{\text{МАИ}}(\lambda)$ — спектральный коэффициент пропускания материала транспаранта; $H^{\text{МАИ}}(x_{\text{м}}, y_{\text{м}})$ — нормированная функция, описывающая пространственное распределение пропускания транспаранта.

Если транспарант подвижный или изображение, формируемое ОС, перемещается относительно МАИ, то, кроме функции пропускания (7.1), требуется задать систему параметрических уравнений

$$\begin{aligned} x_p &= x_p(t); \\ y_p &= y_p(t); \\ \varphi_p &= \varphi_p(t), \end{aligned} \qquad (7.2)$$

которые определяют закон относительного перемещения МАИ и изображения.

Рассмотрим примеры МАИ, используемые в ОЭП различного назначения.

Следящие оптико-электронные пеленгаторы предназначены для обнаружения объектов и измерения их угловых координат в процессе перемещения объектов относительно визирной оси ОЭП. Поскольку сигналы от объектов регистрируются пеленгационными ОЭП на значительных дальностях, то угловые размеры объектов малы. Основные задачи, решаемые МАИ, входящими в состав таких ОЭП, заключаются в фильтрации сигнала от малоразмерного объекта для его обнаружения при наличии пространственно неравномерного фона, а также кодировании в параметрах потока излучения на выходе МАИ информации об угловых координатах объекта в поле обзора ОЭП. Поэтому к МАИ в ОЭП следящего и пеленгационного типов предъявляются следующие основные требования:

- достаточная для целей управления процессом самонаведения крутизна и линейность модуляционной характеристики,

определяющей зависимость модулируемого параметра потока излучения от координат смещения изображения малоразмерного источника излучения;

• эффективное подавление сигналов от протяженных объектов (фонов), имеющих случайное распределение поля яркости.

Конкретные примеры МАИ следящих пеленгаторов с различными видами модуляции приведены в работе [2].

Информационные пеленгаторы сканирующего типа предназначены для регистрации распределения поля яркости в пространстве предметов. Основной функцией МАИ, используемых в составе таких ОЭП, является преобразование двумерного оптического сигнала в одномерный временно́й сигнал. Эта задача осуществляется путем последовательного сканирования малым мгновенным угловым полем в пределах поля обзора и формирования временно́го потока излучения, пропорционального яркости излучения в каждой точке пространства предметов. Основное требования к МАИ в этом случае заключается в обеспечении минимальных искажений информации о пространственном распределении яркости поля излучения при максимально возможной дальности действия ОЭП. В качестве транспаранта МАИ в таких ОЭП используют диафрагмы малых размеров, за которыми устанавливают приемники излучения (ПИ). В современных пеленгаторах сканирующего типа функции транспаранта выполняют непосредственно фоточувствительные элементы одноэлементных или многоэлементных ПИ.

Примером таких ОЭП являются тепловизоры сканирующего типа, которые обеспечивают преобразование пространственного распределения яркости, обусловленного собственным излучением объектов пространства предметов, в видимое человеком изображение [6, 7].

Следует отметить, что в современных ОЭП функции МАИ реализуются матричными приемниками излучения (МПИ) без использования сканирования пространства предметов. В этом случае преобразование двумерного оптического сигнала можно рассматривать как пространственную амплитудно-импульсную модуляцию.

7.2. Преобразование детерминированных сигналов модулятором анализатора изображения

Математическое описание преобразования сигнала выполним при следующей постановке задачи. Сигнал, заданный пространственным распределением спектральной яркости $L_\lambda(\lambda, x, y)$ в пространстве предметов, преобразуется ОС в спектральное распределение облученности $E_\lambda(\lambda, x', y')$. Модулятор анализатора изображения представляет собой плоский транспарант с функцией пропускания, описываемой выражением (7.1). Первая (входная) поверхность МАИ располагается в плоскости, находящейся в непосредственной близости от плоскости $x'0'y'$ изображения ОС (рис. 7.1), причем с МАИ связана система координат $x_м 0_м y_м$, которая может перемещаться вместе с транспарантом МАИ в плоскости, параллельной плоскости изображения. Перемещение МАИ описывается вектором $\vec{r}_p = (x_p, y_p)^T$ и углом поворота φ_p. В общем случае перемещение может изменяться во времени по закону, который описывается системой параметрических уравнений (7.2), или иметь вид $\vec{r}_p(t) = [x_p(t), y_p(t)]^T$ и $\varphi_p(t)$.

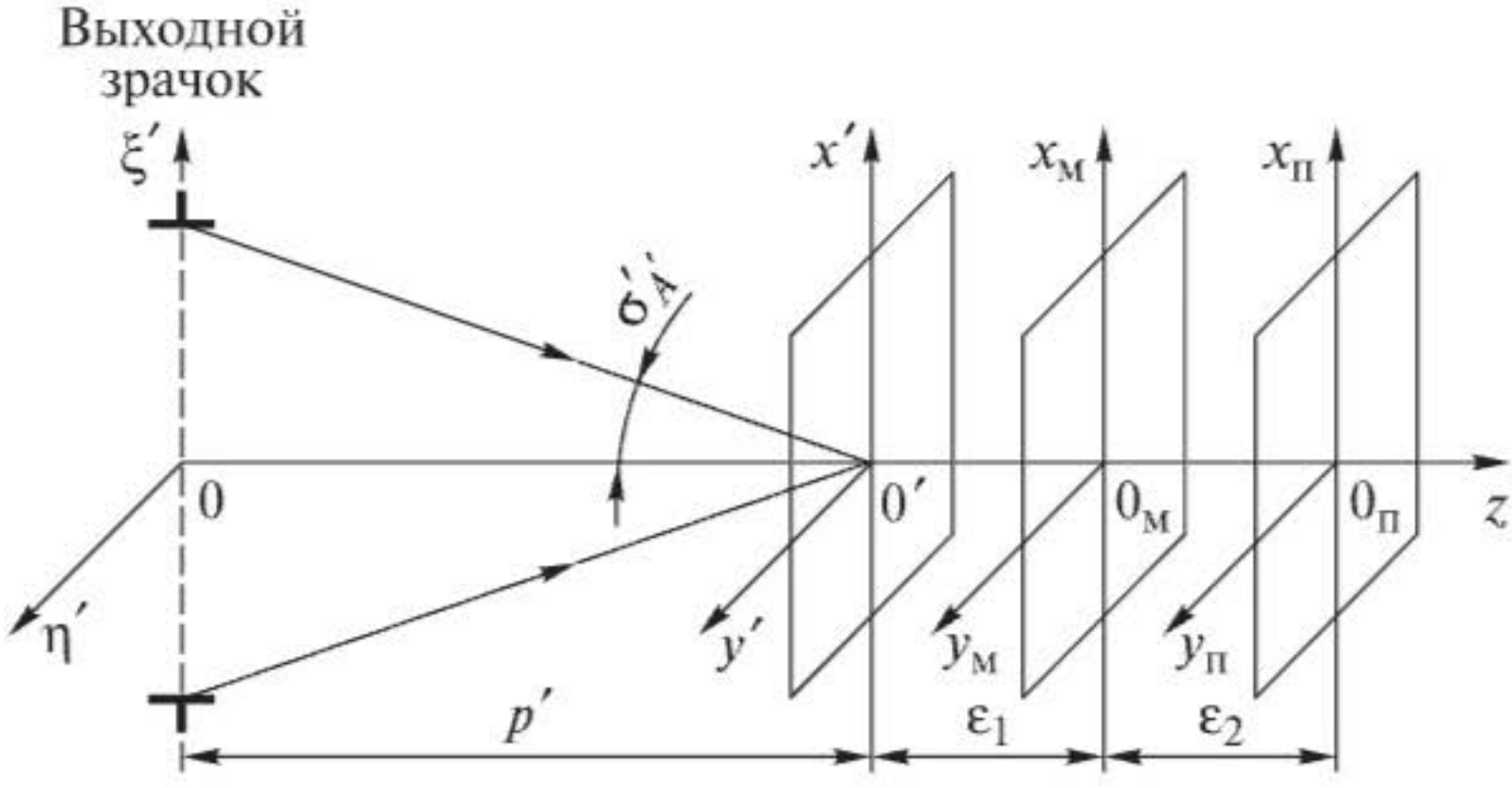


Рис. 7.1. Системы координат в плоскости анализа изображения

Плоскость $x_п 0_п y_п$ МАИ, в которой формируется выходной сигнал в виде потока излучения, также находится в непосредственной близости от плоскости изображения. Таким образом, предполагается, что расстояния между определенными выше плоскостями $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$.

Для упрощения записи математических выражений будем считать, что распределение облученности в плоскости изображения ОС является квазимонохроматическим и определяется функцией

$$E_\lambda(x', y') = E_\lambda(\lambda, x', y')\Delta\lambda,$$

а функция пропускания МАИ описывается выражением

$$H_\tau^{\text{МАИ}}(x_\text{м}, y_\text{м}) = \tau_{\text{МАИ}} H^{\text{МАИ}}(x_\text{м}, y_\text{м}).$$

7.2.1. Поток излучения и его пространственно-частотный спектр на выходе неподвижного модулятора анализатора изображений

Рассмотрим случай, когда МАИ неподвижен, но имеет произвольное положение, характеризуемое вектором $\vec{r}_p$ и углом поворота φ_p. Положение системы координат $x_\text{м} 0_\text{м} y_\text{м}$, связанной с МАИ, относительно системы координат плоскости изображения иллюстрирует рис. 7.2.

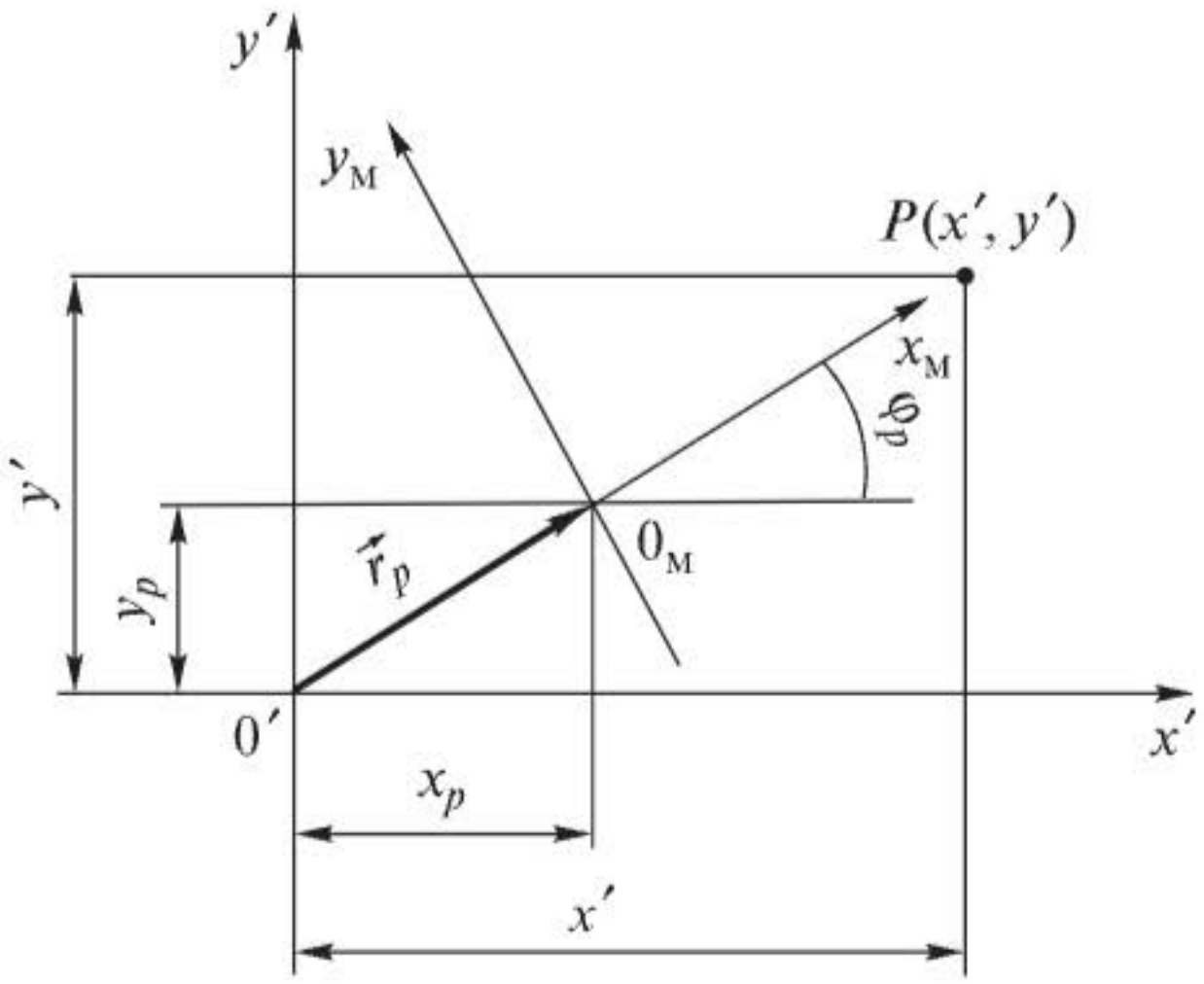


Рис. 7.2. Положение системы координат МАИ в плоскости изображения ОС

При этом функция пропускания смещенного МАИ имеет вид

$$H^{\text{МАИ}}(x_\text{м}, y_\text{м}) = H^{\text{МАИ}}(x' - x_p, y' - y_p, \varphi_p).$$

При заданном распределении $E_\lambda(x', y')$ квазимонохроматической облученности в изображении пространства предметов запишем элементарный поток излучения на выходе МАИ через элементарную площадку $dq' = dx'dy' = dq'_{\text{м}} = dx_{\text{м}}dy_{\text{м}}$ транспаранта

$$d\Phi_\lambda = E_\lambda(x', y')H^{\text{МАИ}}(x' - x_p, y' - y_p; \varphi_p)dx'dy'.$$

Проинтегрировав полученное выражение в пределах всей площади транспаранта МАИ, получим выражение, описывающее зависимость выходного сигнала в виде потока излучения от параметров x_p, y_p и φ_p, характеризующих положение МАИ относительно изображения:

$$\Phi_\lambda(x_p, y_p, \varphi_p) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E_\lambda(x', y')H^{\text{МАИ}}(x' - x_p, y' - y_p; \varphi_p)dx'dy' =$$

$$= E_\lambda(x_p, y_p) * H^{*\text{МАИ}}(x_p, y_p, \varphi_p). \qquad (7.3)$$

Выражение (7.3) представляет собой интегральную операцию взаимной ковариации.

Рассмотрим ***частотный метод*** преобразования оптических сигналов с помощью МАИ. Вычислив преобразование Фурье от выражения (7.3), получим пространственно-частотный спектр (ПЧС) потока излучения на выходе МАИ:

$$\tilde{\Phi}_\lambda(\nu_x, \nu_y; \varphi) = F\{E_\lambda(x_p, y_p) * H^{*\text{МАИ}}(x_p, y_p; \varphi_p)\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E_\lambda(x', y')H^{\text{МАИ}}(x' - x_p, y' - \ _p; y\varphi_p) \ \ 'dx'd\right\}\times$$

$$\times \exp\left[-i \cdot 2\pi(\nu_x x_p + \nu_y y_p)\right]dx_p dy_p =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E_\lambda(x', y')dx'dy' \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H^{\text{МАИ}}(\ '- \ x, \ 'x - \ y; \varphi_p y)\times$$

$$\times \exp\left[-i \cdot 2\pi(\nu_x x_p + \nu_y y_p)\right]dx_p dy_p. \qquad (7.4)$$

Выполним замену переменных во внутреннем двойном интеграле $u = x' - x_p$, $\nu = y' - y_p$, $dx_p = -du$, $d_p = -d\nu$. Тогда для внутреннего двойного интеграла получим выражение

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H^{\text{МАИ}}\left(x'-x_p,\, y'-y_p;\, \varphi_p\right)\exp\left[-i\cdot 2\pi\left(\nu_x x_p+\nu_y y_p\right)\right]dx_p dy_p =$$

$$=\exp\left[-i\cdot 2\pi\left(\nu_x x'+\nu_y y'\right)\right]\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H^{\text{МАИ}}\left(u,\, \nu;\, \varphi_p\right)\exp\left[-i\cdot 2\pi\left(\left(-\nu_x\right)u+\left(-\nu_y\right)\nu\right)\right]du d\nu =$$

$$=\exp\left[-i\cdot 2\pi\left(\nu_x x'+\nu_y y'\right)\right]\tilde{H}^{\text{МАИ}}\left(-\nu_x,-\nu_y;\varphi_p\right).$$

Подставив полученное выражение в (7.4), имеем

$$\tilde{\Phi}_\lambda\left(\nu_x,\nu_y;\varphi_p\right)=\tilde{H}^{\text{МАИ}}\left(-\nu_x,-\nu_y;\varphi_p\right)\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E_\lambda(x',y')\exp\left[-i\cdot 2\pi\left(\nu_x x'+\nu_y y'\right)\right]dx'dy' =$$

$$=\tilde{E}_\lambda\left(\nu_x,\nu_y\right)\tilde{H}^{\text{МАИ}}\left(-\nu_x,-\nu_y;\varphi_p\right).$$

Поскольку функция пропускания МАИ действительная, т. е. $H^{\text{МАИ}}\left(x_{\text{м}},y_{\text{м}}\right)=H^{*\text{МАИ}}\left(x_{\text{м}},y_{\text{м}}\right)$, на основе свойства эрмитовости можно записать равенство $\tilde{H}^{\text{МАИ}}\left(-\nu_x,-\nu_y;\varphi_p\right)=$ $=\tilde{H}^{*\text{МАИ}}\left(\nu_x,\nu_y;\varphi_p\right)$. Тогда окончательно получим

$$\tilde{\Phi}_\lambda\left(\nu_x,\nu_y;\varphi_p\right)=\tilde{E}_\lambda\left(\nu_x,\nu_y\right)\tilde{H}^{*\text{МАИ}}\left(\nu_x,\nu_y;\varphi_p\right)=$$

$$=\pi\tau\sin^2\sigma_A\tilde{L}_\lambda\left(\beta\nu_x,\beta\nu_y\right)\tilde{H}_N^{\text{ос}}\left(\nu_x,\nu_y\right)\tilde{H}^{*\text{МАИ}}\left(\nu_x,\nu_y;\varphi_p\right), \quad (7.5)$$

где $\tilde{L}_\lambda\left(\beta\nu_x,\beta\nu_y\right)$ — ПЧС распределения яркости; $\tilde{H}_N^{\text{ос}}\left(\nu_x,\nu_y\right)$ — ОПФ ОС; $\tilde{H}^{*\text{МАИ}}\left(\nu_x,\nu_y;\varphi_p\right)=F\left\{H^{\text{МАИ}}\left(x_{\text{м}},y_{\text{м}};\varphi_p\right)\right\}^*$ — функция комплексно-сопряженная с пространственной передаточной функцией МАИ; $\tau=\tau_{\text{а}}\tau_{\text{ОС}}\tau_{\text{МАИ}}$ — коэффициент пропускания.

Функция, описывающая поток излучения на выходе МАИ, может быть определена как обратное преобразование Фурье от выражения (7.5):

$$\Phi_\lambda\left(x_p,y_p,\varphi_p\right)=F^{-1}\left\{\tilde{\Phi}_\lambda\left(\nu_x,\nu_y;\varphi_p\right)\right\}. \quad (7.6)$$

По определению пространственной передаточной функцией (ППФ) МАИ называют фурье-образ от функции пропускания

МАИ при заданном значении параметра φ_p, которое обычно принимают равным нулю, $\varphi_p = 0$, а именно

$$\tilde{H}^{\text{МАИ}}(\nu_x, \nu_y) = F\left\{H^{\text{МАИ}}(x_{\text{м}}, y_{\text{м}})\right\}. \qquad (7.7)$$

Выражение (7.5) определяет комплексные амплитуды пространственно-частотных гармоник в спектре выходного потока излучения, значения которых зависят от ОПФ ОС и ППФ МАИ. Как будет показано далее, в случае перемещения МАИ по закону, определяемому системой параметрических уравнений (7.2), эти гармоники из пространственных преобразуются во временные, т. е. спектр сигнала на выходе МАИ определяется в области временных частот.

7.2.2. Способы описания пространственной передаточной функции модулятора анализатора изображений

Довольно часто транспарант МАИ состоит из простых периодически повторяющихся элементов. Поэтому при описании ППФ МАИ можно использовать свойство линейности преобразования Фурье и теорему смещения. В зависимости от вида элементов транспаранта используют описание коэффициента пропускания в декартовой или полярной системе координат. Рассмотрим вначале определение ППФ МАИ при описании коэффициента пропускания в декартовой системе координат.

Пространственная передаточная функция модулятора анализатора изображений в декартовой системе координат. На рис. 7.3 представлен фрагмент МАИ, состоящего из однотипных элементов в виде одинаковых прямоугольников.

Пусть пропускание элемента транспаранта, расположенного в начале координат — нулевого элемента, описывается функцией $H_0^{\text{МАИ}}(x_{\text{м}}, y_{\text{м}})$. Тогда функция пропускания k-го элемента может быть выражена через нулевой элемент:

$$H_k^{\text{МАИ}}(x_{\text{м}}, y_{\text{м}}) = H_0^{\text{МАИ}}(x_{\text{м}} - x_k, y_{\text{м}} - y_k),$$

где x_k, y_k — координаты центра k-го элемента.

Функция пропускания всего транспаранта МАИ может быть записана в виде

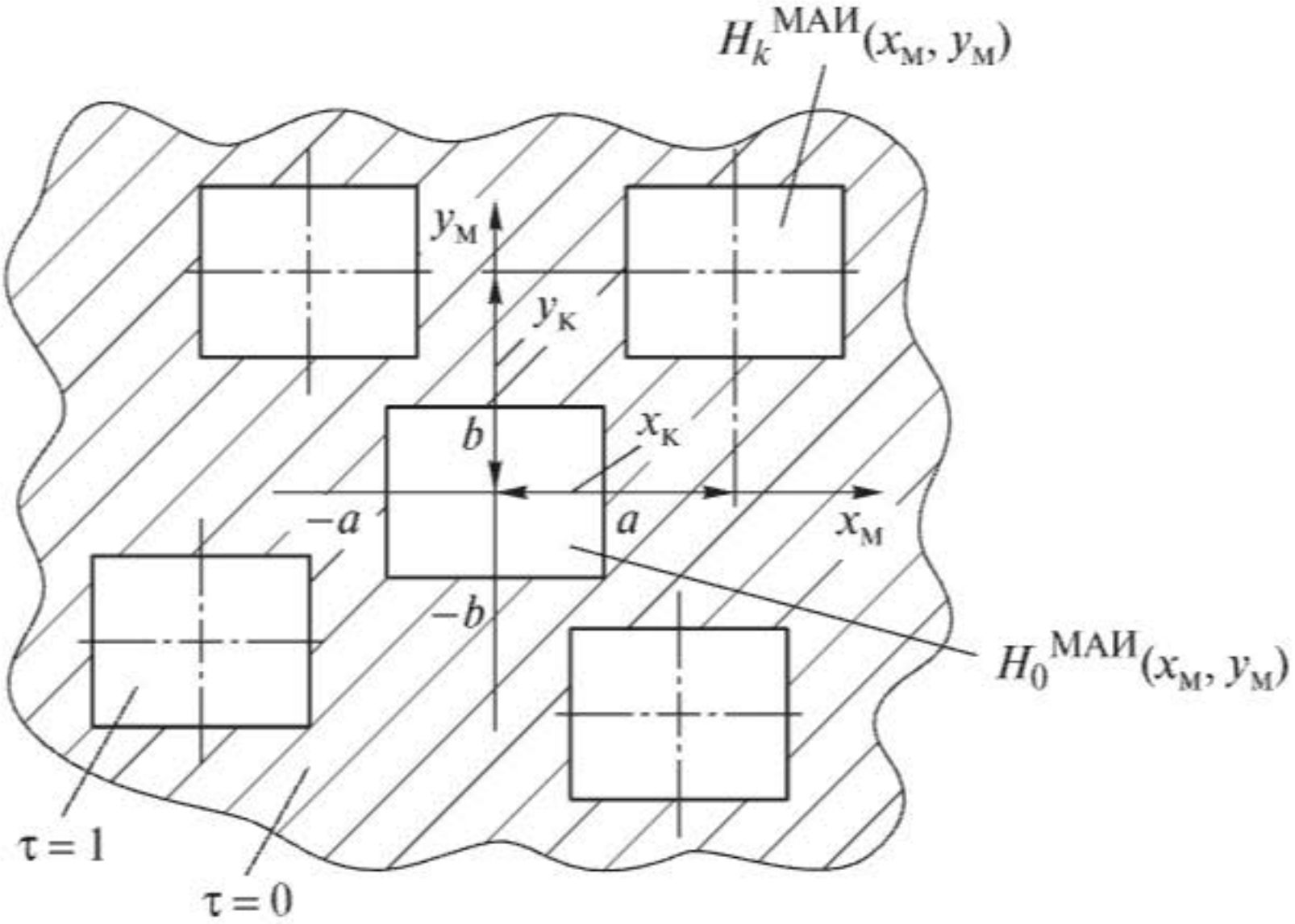


Рис. 7.3. Фрагмент транспаранта МАИ

$$H^{\text{МАИ}}(x_\text{м}, y_\text{м}) = \sum_{k=0}^{N-1} H_0^{\text{МАИ}}(x_\text{м} - x_k, y_\text{м} - y_k), \qquad (7.8)$$

где N — общее число прозрачных элементов транспаранта МАИ.

Фурье-образ нулевого элемента определяется соотношением

$$\tilde{H}_0^{\text{МАИ}}(\nu_x, \nu_y) = F\left\{H_0^{\text{МАИ}}(x_\text{м}, y_\text{м})\right\},$$

преобразование Фурье от k-го элемента с учетом теоремы смещения примет вид

$$\tilde{H}_k^{\text{МАИ}}(\nu_x, \nu_y) = F\left\{H_0^{\text{МАИ}}(x_\text{м} - x_k, y_\text{м} - y_k)\right\} =$$

$$= \tilde{H}_0^{\text{МАИ}}(\nu_x, \nu_y)\exp\left[-i \cdot 2\pi(\nu_x x_k + \nu_y y_k)\right]. \qquad (7.9)$$

Вычислив преобразование Фурье от функции (7.8) с учетом зависимости (7.9), получим ППФ МАИ в виде

$$\tilde{H}^{\text{МАИ}}(\nu_x, \nu_y) = \tilde{H}_0^{\text{МАИ}}(\nu_x, \nu_y)\sum_{k=0}^{N-1}\exp\left[-i \cdot 2\pi(\nu_x x_k + \nu_y y_k)\right]. \quad (7.10)$$

Для некоторых типов МАИ, как, например, для транспаранта МАИ, представленного на рис. 7.4, можно получить более простую формулу для описания ППФ МАИ.

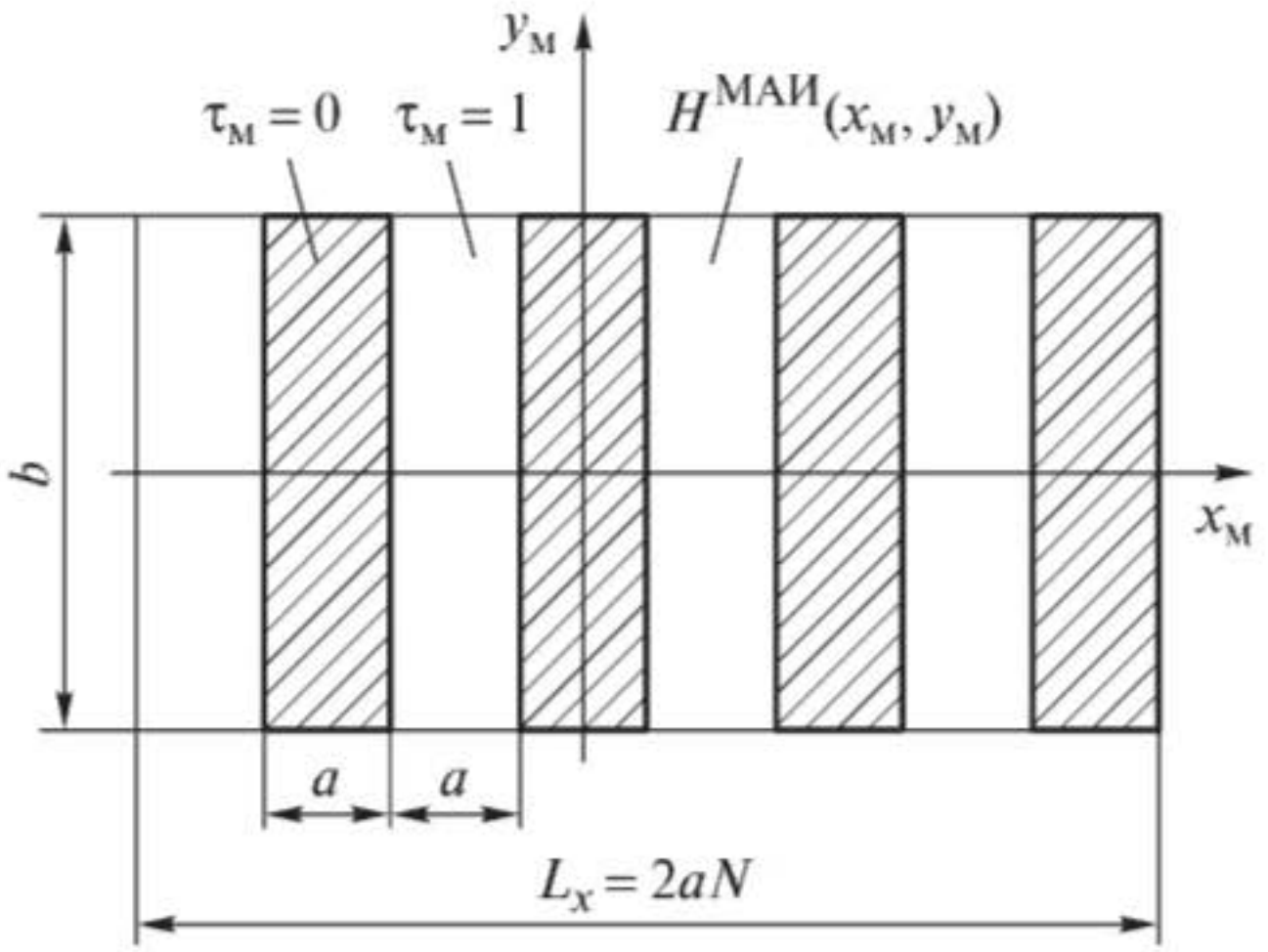


Рис. 7.4. Транспарант МАИ в виде «полосатого» растра (шпальная мира)

Функцию пропускания транспаранта МАИ, представленную на рис. 7.4, можно описать выражением

$$H^{\text{МАИ}}(x_\text{м}, y_\text{м}) = \left[\text{rect}\left(\frac{x_\text{м}}{a}, \frac{y_\text{м}}{b}\right) \otimes \frac{1}{2a}\text{comb}\left(\frac{x_\text{м}}{2a}\right)\right]\text{rect}\left(\frac{x_\text{м}}{2aN}\right). \quad (7.11)$$

Функция пропускания транспаранта МАИ разделяется по переменным. Взяв преобразование Фурье от (7.11), получим

$$\tilde{H}^{\text{МАИ}}(\nu_x, \nu_y) =$$

$$= F\left\{\left[\text{rect}\left(\frac{x_\text{м}}{a}\right) \otimes \frac{1}{2a}\text{comb}\left(\frac{x_\text{м}}{2a}\right)\right]\text{rect}\left(\frac{x_\text{м}}{2aN}\right)\right\} F\left\{\text{rect}\left(\frac{y_\text{м}}{b}\right)\right\} =$$

$$= b\,\text{sinc}(\pi b\nu_y)\left\{a\,\text{sinc}(\pi a\nu_x)\text{comb}(2a\nu_x) \otimes\right.$$

$$\left.\otimes 2aN\,\text{sinc}(2\pi aN\nu_x)\right\} = 2a^2bN\,\text{sinc}(\pi b\nu_y) \times$$

$$\times\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\text{sinc}(\pi a\nu'_x)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\text{sinc}\left[2\pi aN(\nu_x - \nu'_x)\right]\delta(2a\nu'_x - k)\right\}d\nu'_x =$$

$$= abN\,\text{sinc}(\pi b\nu_y) \times$$

$$\times\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\text{sinc}(\pi a\nu'_x)\text{sinc}\left[2\pi aN(\nu_x - \nu'_x)\right]\delta\left(\nu'_x - \frac{k}{2a}\right)d\nu'_x =$$

$$= abN\,\text{sinc}(\pi b\nu_y)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\text{sinc}\left(\frac{\pi k}{2}\right)\text{sinc}\left[2\pi aN\left(\nu_x - \frac{k}{2a}\right)\right]. \quad (7.12)$$

На рис. 7.5 представлен график сечения ППФ транспаранта МАИ в виде «полосатого» растра, рассчитанный для положительных пространственных частот при следующих значениях параметров: $a = 0{,}1$ мм; $b = 2{,}5$ мм; $N = 4$.

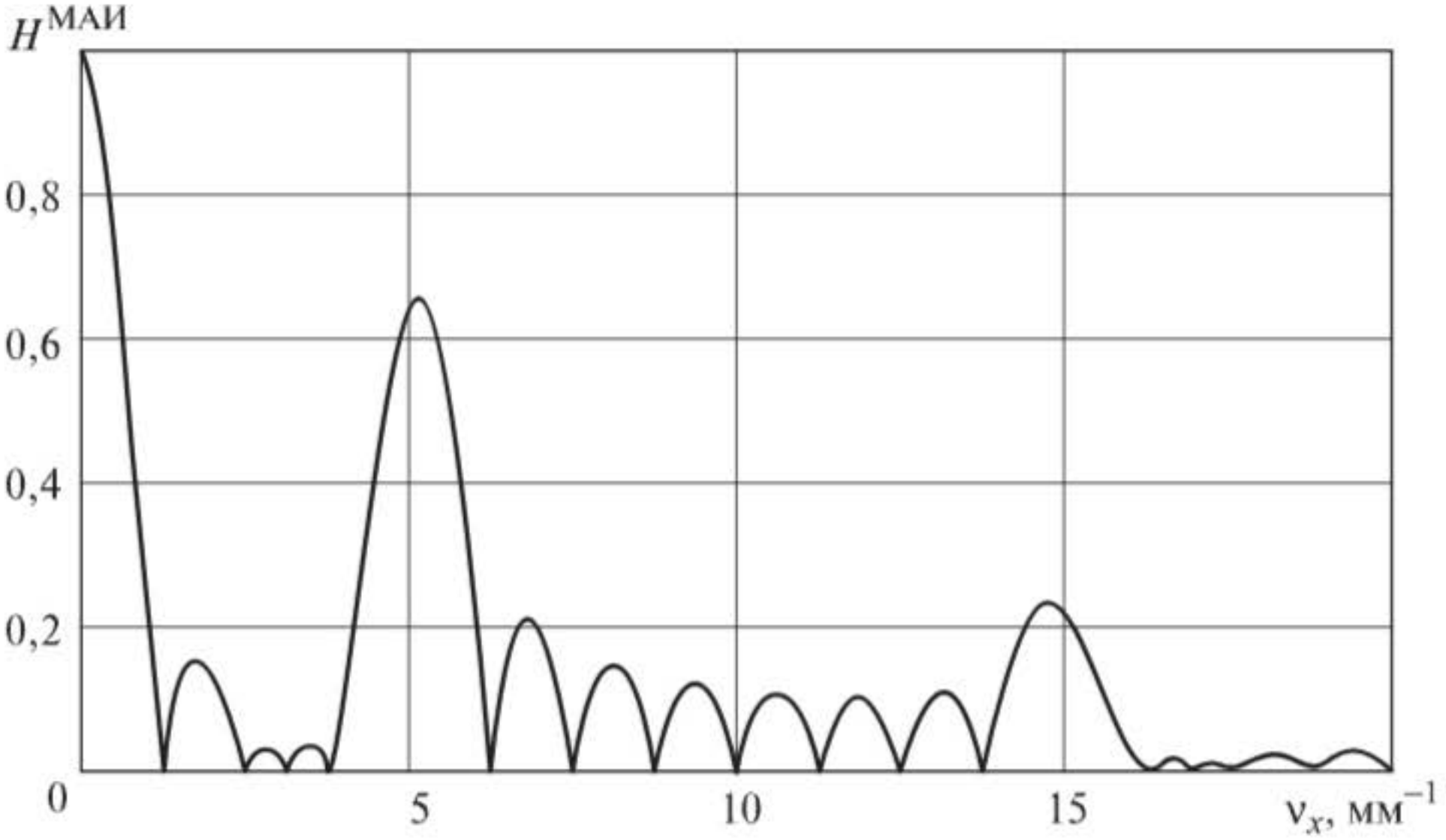


Рис. 7.5. График сечения ППФ транспаранта МАИ в виде «полосатого» растра

Пространственная передаточная функция модулятора анализатора изображения в полярной системе координат

Для описания МАИ, имеющего осевую симметрию, например секторного растра, представленного на рис. 7.6, удобно использовать полярную систему координат.

Введем функцию $H_0^{\text{МАИ}}(r_{\text{м}}, \varphi_{\text{м}})$, которая описывает пропускание прозрачного «нулевого» элемента такого транспаранта МАИ в полярной системе координат. Функцию пропускания k-го элемента можно выразить через функцию пропускания нулевого элемента:

$$H_k^{\text{МАИ}}(r_{\text{м}}, \varphi_{\text{м}}) = H_0^{\text{МАИ}}(r_{\text{м}}, \varphi_{\text{м}} - k \cdot 2\varphi_0).$$

Функция пропускания всего транспаранта МАИ, состоящего из N прозрачных элементов, может быть записана в виде

$$H^{\text{МАИ}}(r_{\text{м}}, \varphi_{\text{м}}) = \sum_{k=0}^{N-1} H_0^{\text{МАИ}}(r_{\text{м}}, \varphi_{\text{м}} - k \cdot 2\varphi_0). \qquad (7.13)$$

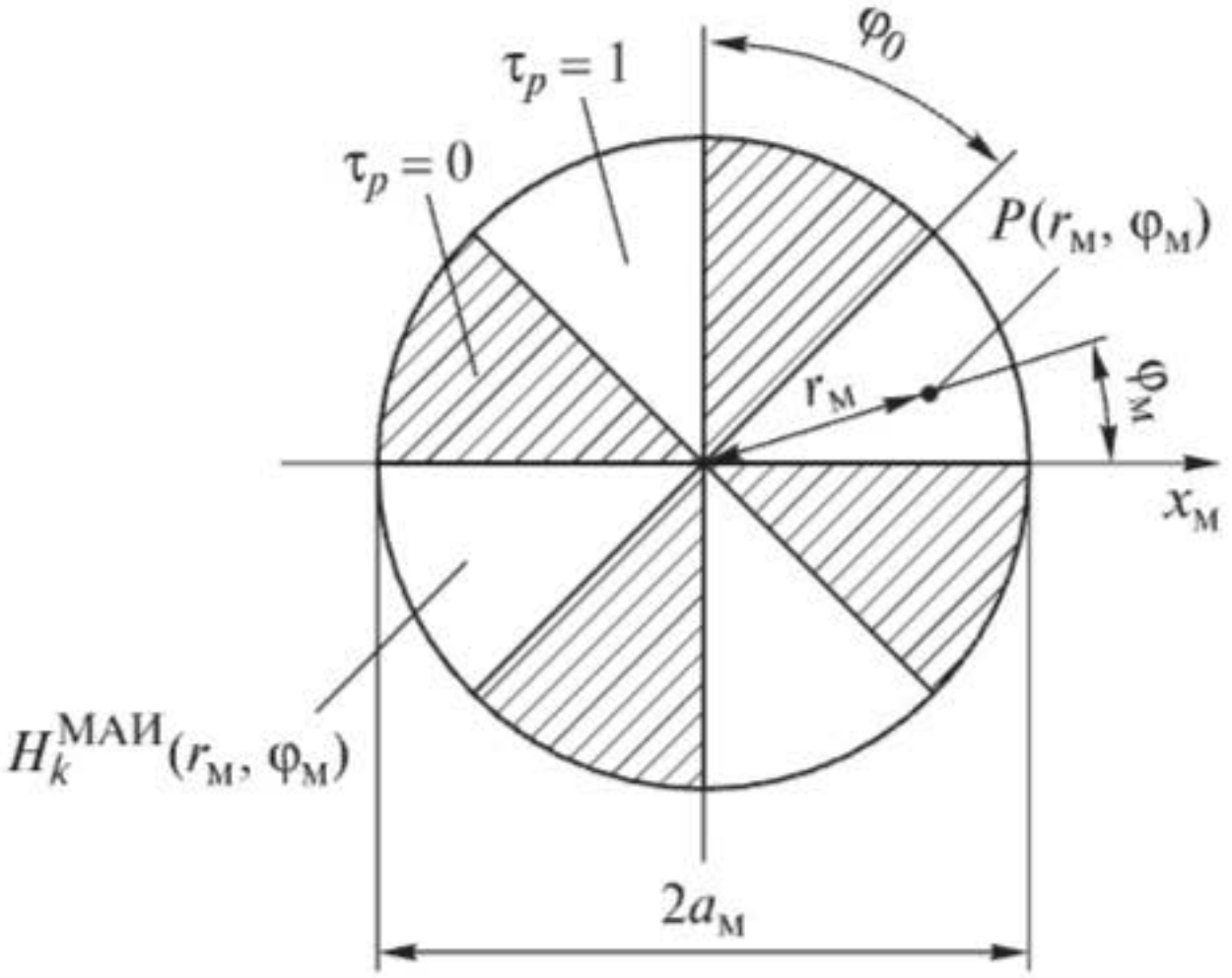


Рис. 7.6. Транспарант МАИ с осевой симметрией

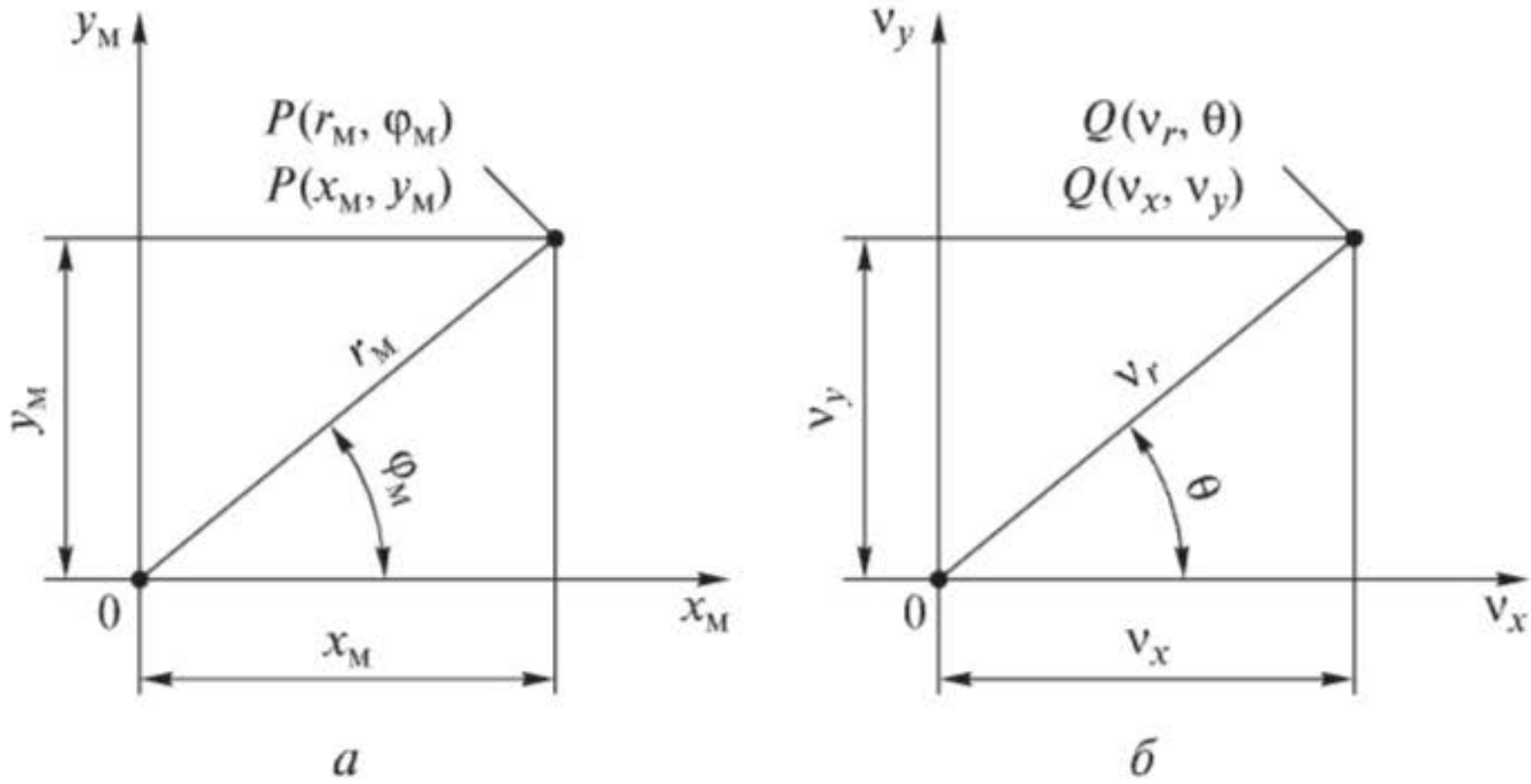
Вычислим преобразование Фурье функции пропускания нулевого элемента транспаранта МАИ, которая задана в полярной системе координат. Для этого запишем сначала преобразование Фурье нулевого элемента транспаранта в декартовой системе координат, а затем перейдем к полярным координатам. Преобразование Фурье функции пропускания нулевого элемента транспаранта МАИ в декартовой системе координат имеет вид

$$\tilde{H}_0^{МАИ}\left(\nu_x, \nu_y\right) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H_0^{МАИ}\left(x_м, y_м\right)\exp\left[-i2\pi\left(\nu_x x_м + \nu_y y_м\right)\right]dx_м dy_м. \qquad (7.14)$$

Связь координат точек P и Q в декартовой и полярной системах координат в координатной и пространственно-частотной областях описания поясняет рис. 7.7.

Зависимость координат точки P, заданной в координатной области, в декартовой и полярной системах координат выражается соотношениями $x_м = r_м \cos\varphi_м$ и $y_м = r_м \sin\varphi_м$. Если точка Q задана в пространственно-частотной области, то связь координат этой точки в декартовой и полярной системах координат определяется в виде $\nu_x = \nu_r \cos\theta$ и $\nu_y = \nu_r \sin\theta$. Тогда справедливы следующие соотношения:



а *б*

Рис. 7.7. К зависимости между декартовыми и полярными координатами в координатной (*а*) и пространственно-частотной (*б*) областях

$$dx_м dy_м = r_м dr_м d\varphi_м;$$

$$\nu_x x_м + \nu_y y_м = r_м \nu_r \left(\cos\theta\cos\varphi_м + \sin\theta\sin\varphi_м\right) = r_м \nu_r \cos\left(\varphi_м - \theta\right).$$

Следовательно, в полярной системе координат фурье-образ функции пропускания нулевого элемента транспаранта

$$\tilde{H}_0^{\text{МАИ}}\left(\nu_r, \theta\right) =$$

$$= \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} H_0^{\text{МАИ}}\left(r_м, \varphi_м\right)\exp\left[-i\cdot 2\pi\nu_r r_м \cos\left(\varphi_м - \theta\right)\right] r\, dr\, d\varphi_м, \quad (7.15)$$

а фурье-образ функции пропускания k-го элемента имеет вид

$$\tilde{H}_k^{\text{МАИ}}\left(\nu_r, \theta\right) = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} H_0^{\text{МАИ}}\left(r_м, \varphi_м - k\cdot 2\varphi_0\right)\times$$

$$\times \exp\left[-i\cdot 2\pi\nu_r r_м \cos\left(\varphi_м - \boldsymbol{\theta}\right)\right] r_м dr_м d\varphi_м. \quad (7.16)$$

Проведя замену переменной $\gamma_м = \varphi_м - k\cdot 2\varphi_0$, $d\gamma_м = d\varphi_м$ и учитывая, что функция $H_0^{\text{МАИ}}\left(r_м, \gamma_м\right)$ является периодической по аргументу $\gamma_м$ с периодом, равным 2π, выражение (7.16) представим в виде

$$\tilde{H}_k^{\text{МАИ}}(\nu_r, \theta) = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} H_0^{\text{МАИ}}(r_{\text{м}}, \gamma_{\text{м}}) \times$$

$$\times \exp\left[-i \cdot 2\pi\nu_r r_{\text{м}} \cos\left(\gamma_{\text{м}} - (\theta - k\varphi_0)\right)\right] r_{\text{м}} dr_{\text{м}} d\gamma_{\text{м}}. \qquad (7.17)$$

Из формул (7.15) и (7.17) следует, что

$$\tilde{H}_k^{\text{МАИ}}(\nu_r, \theta) = \tilde{H}_0^{\text{МАИ}}(\nu_r, \theta - k \cdot 2\varphi_0). \qquad (7.18)$$

Таким образом, ППФ k-го элемента транспаранта МАИ получается путем поворота ППФ нулевого элемента в частотной области на угол $k \cdot 2\varphi_0$ аналогично повороту функции пропускания k-го элемента в пространственной области. Вычислив преобразование Фурье от выражения (7.13) с учетом (7.18), получим формулу для ППФ транспаранта МАИ в полярной системе координат:

$$\tilde{H}^{\text{МАИ}}(\nu_r, \theta) = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{H}_0^{\text{МАИ}}(\nu_r, \theta - k \cdot 2\varphi_0). \qquad (7.19)$$

7.2.3. Поток излучения и его частотно-временной спектр на выходе подвижного модулятора анализатора изображения

Поток излучения на выходе подвижного модулятора анализатора изображения

Для заданных значений смещения и поворота МАИ спектральный поток излучения определяется выражением (7.3). Если МАИ перемещается в соответствии с параметрическими уравнениями $x_p(t)$, $y_p(t)$ и $\varphi_p(t)$, т. е. совершает поступательное и вращательное движения, то квазимонохроматический поток излучения будет описываться функцией, зависящей от времени:

$$\Phi_{\lambda t}(t) = \Phi_{\lambda}\left[x_p(t), y_p(t), \varphi_p(t)\right] =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E_{\lambda}(x', y', t) H^{\text{МАИ}}\left[x' - x_p(t), y' - y_p(t), \varphi_p(t)\right] dx' dy'. \qquad (7.20)$$

В выражении (7.20) отражен тот факт, что в общем случае облученность в изображении объекта также может изменяться во времени. Однако в подавляющем большинстве случаев время анализа изображения достаточно мало, поэтому изменени-

ем облученности в течение времени анализа можно пренебречь. Поэтому в дальнейшем будем считать, что распределение облученности в изображении объекта не зависит от времени, т. е. $E_\lambda(x', y', t) = E_\lambda(x', y')$.

Рассмотрим варианты, когда транспарант МАИ осуществляет поступательное или вращательное движения.

Поступательное движение транспаранта МАИ. Если транспарант МАИ поступательно перемещается относительно изображения, то система параметрических уравнений имеет вид

$$x_p = x_p(t);\ y_p = y_p(t);\ \varphi_p = 0. \tag{7.21}$$

Тогда выражение (7.20) можно записать таким образом:

$$\Phi_{\lambda I}(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E_\lambda(x', y') H^{\text{МАИ}}\left[x' - x_p(t), y' - y_p(t)\right] dx' dy'. \tag{7.22}$$

Частными случаями поступательного движения МАИ является так называемое линейное и круговое сканирование.

При ***линейном сканировании*** (рис. 7.8) система параметрических уравнений имеет вид

$$x_p = x_p(t) = V_x t;\ \ y_p = 0;\ \varphi_p = 0, \tag{7.23}$$

а квазимонохроматический поток на выходе МАИ описывается выражением

$$\Phi_{\lambda I}(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E_\lambda(x', y') H^{\text{МАИ}}(x' - V_x t, y') dx' dy', \tag{7.24}$$

где $V_x = \text{const}$ — скорость линейного перемещения МАИ в направлении оси x'.

При ***круговом сканировании*** осуществляется круговое поступательное перемещение изображения относительно неподвижного транспаранта МАИ или перемещение транспаранта МАИ относительно неподвижного изображения. Варианты реализации

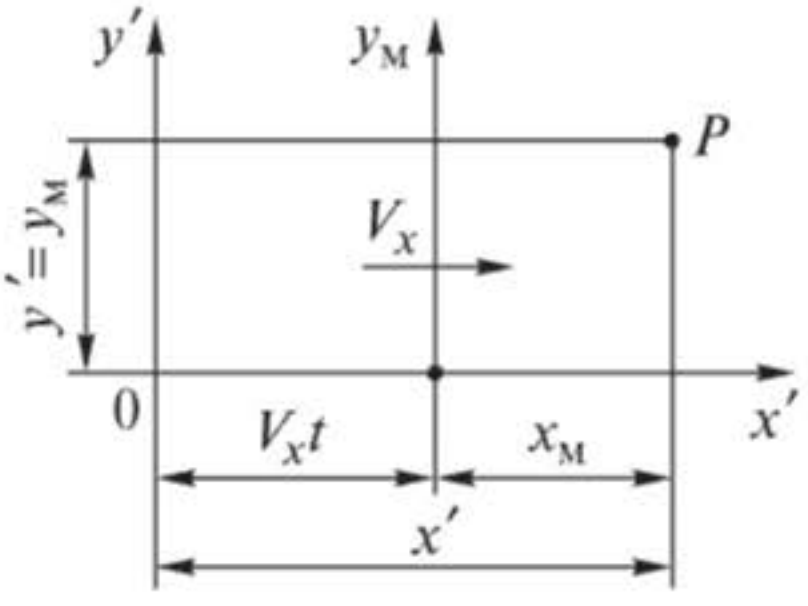


Рис. 7.8. Линейное сканирование МАИ

кругового поступательного движения изображения относительно неподвижного транспаранта МАИ представлены на рис. 7.9 и 7.10.

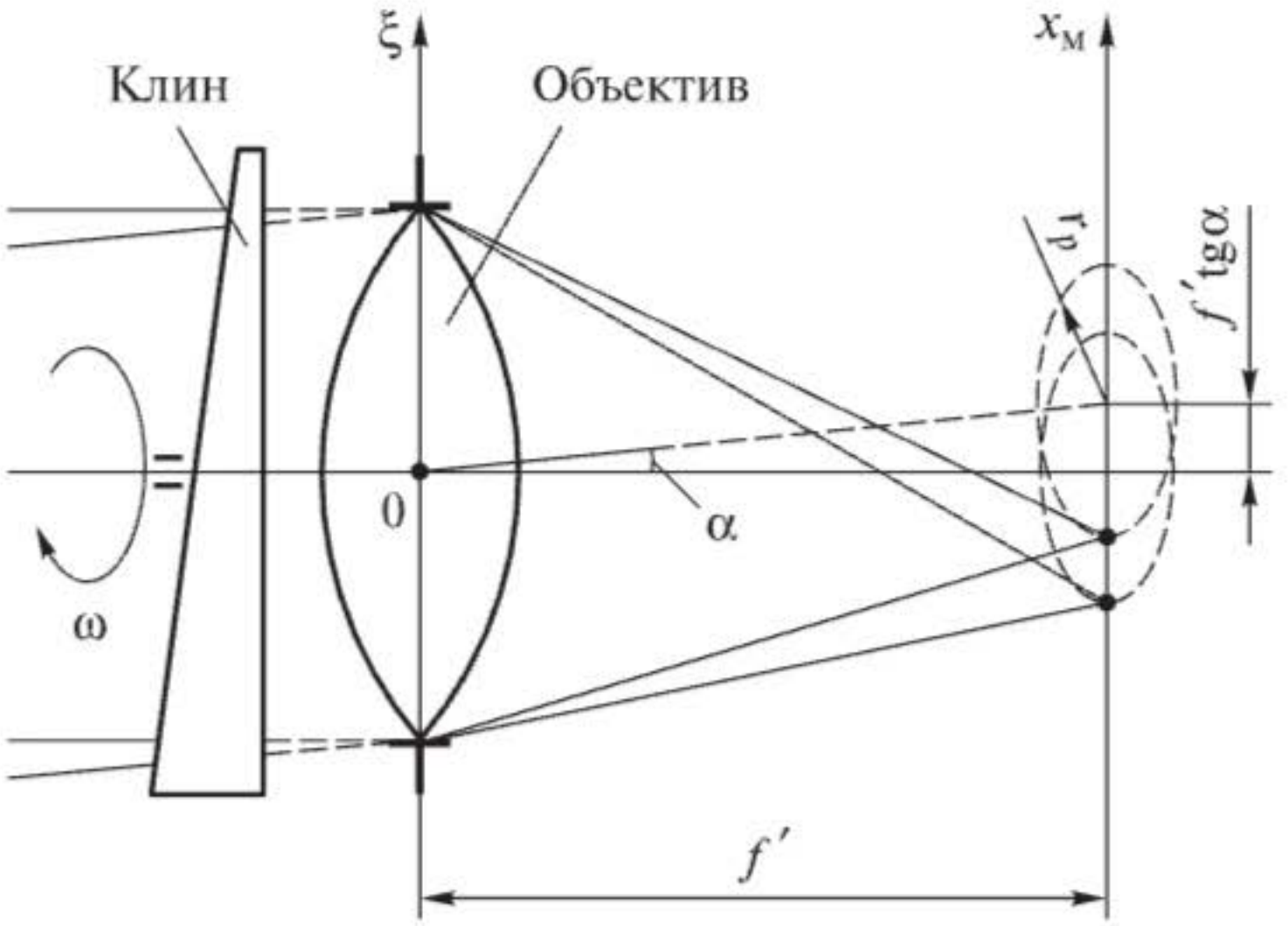


Рис. 7.9. Круговое сканирование изображения за счет вращающего оптического клина

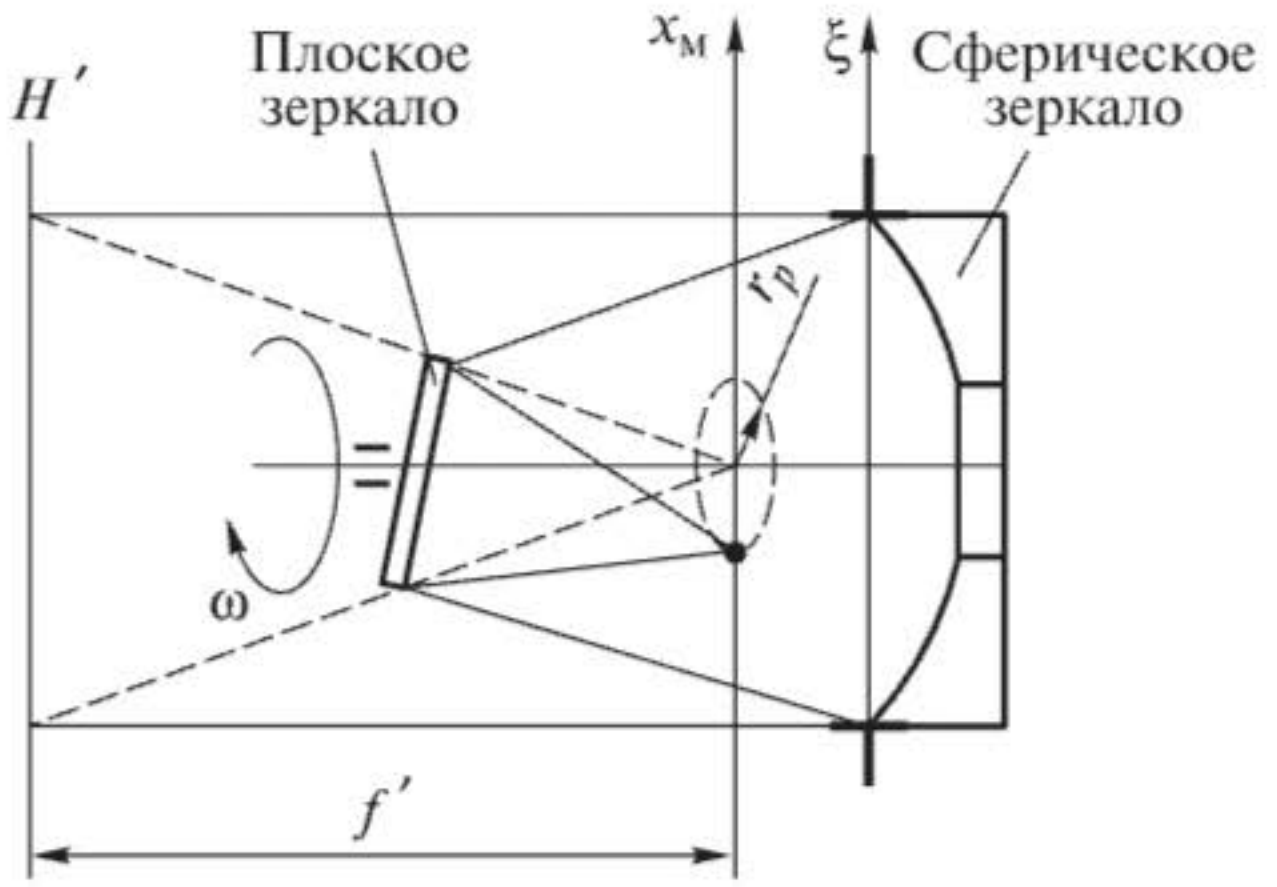


Рис. 7.10. Круговое сканирование изображения за счет вращающегося зеркала

При круговом сканировании перемещается начало координат, связанное с изображением, которое формирует ОС (рис. 7.11), или начало системы координат, связанной с транспарантом МАИ (рис. 7.12).

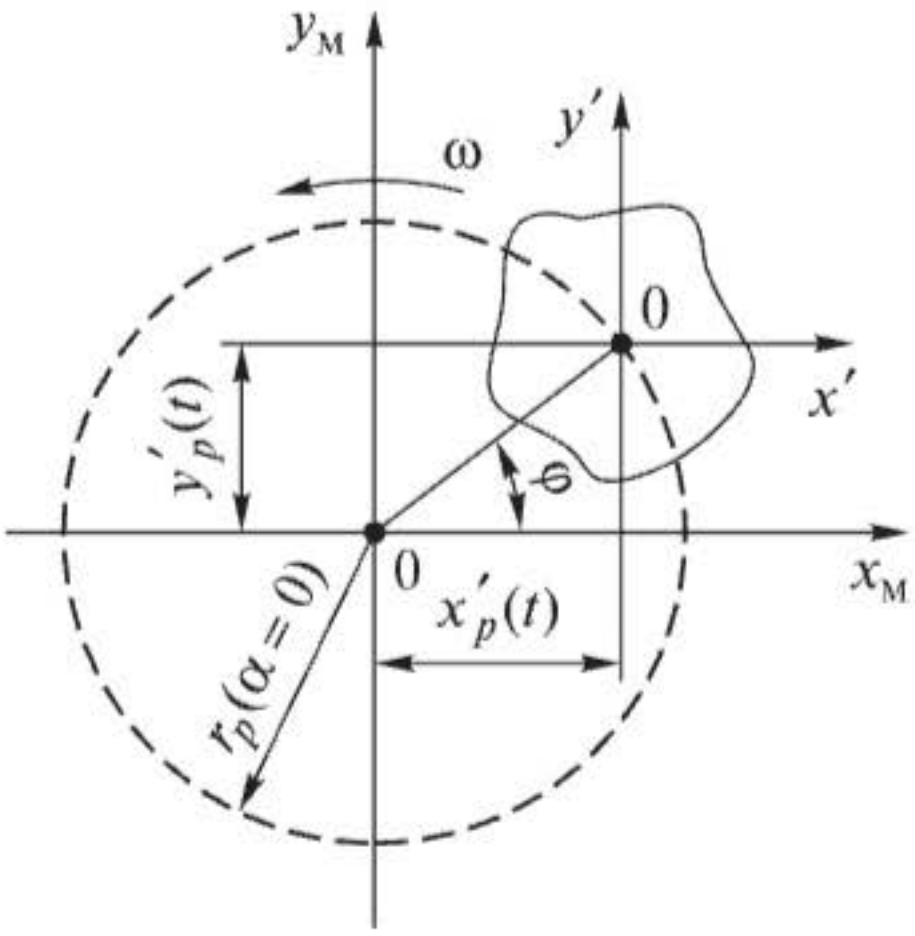


Рис. 7.11. Круговое сканирование изображения относительно неподвижного транспаранта МАИ

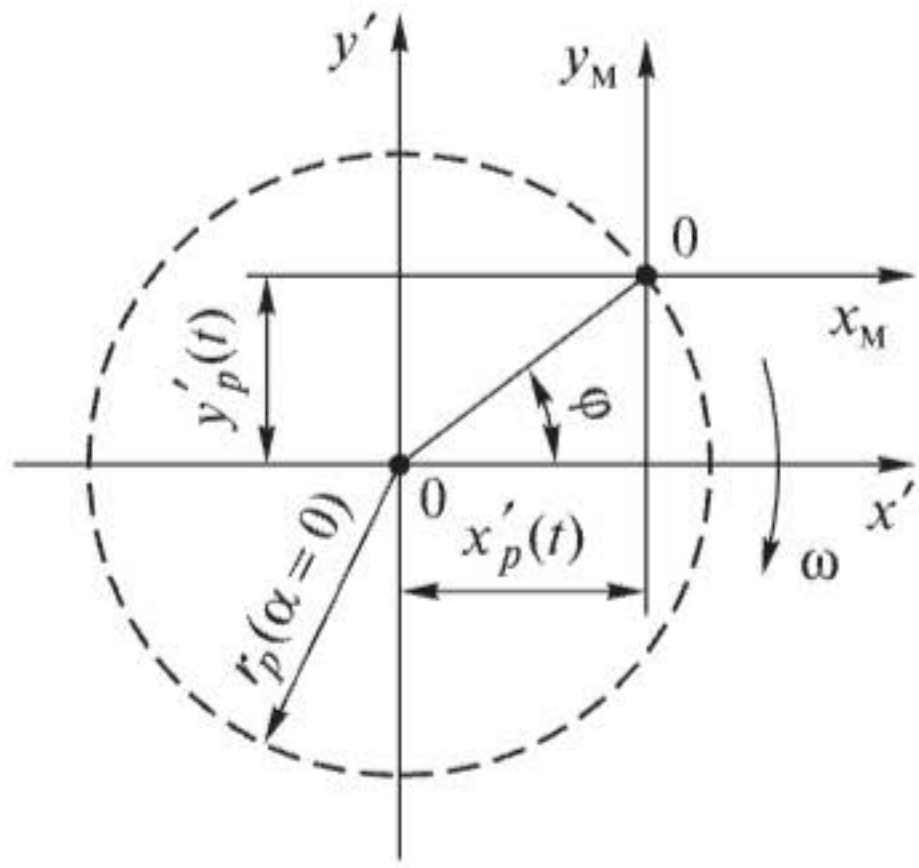


Рис. 7.12. Круговое сканирование транспаранта МАИ относительно неподвижного изображения

В том и другом случае закон относительного движения при круговом сканировании описывается системой следующих параметрических уравнений:

$$x_p = x_p(t) = r_p \cos\frac{2\pi}{T_0}t;$$

$$y_p = y_p(t) = r_p \sin\frac{2\pi}{T_0}t; \qquad (7.25)$$

$$\varphi_p = 0,$$

где r_p, T_0 — радиус и период кругового сканирования.

Как будет показано ниже, здесь важен закон относительного перемещения, а не конкретная техническая реализация этого закона.

При круговом сканировании изображения относительно неподвижного транспаранта МАИ квазимонохроматический поток на выходе МАИ определяется выражением

$$\Phi_{\lambda t}(t) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E_\lambda\left[x_м - x_p(t); y_м - y_p(t)\right] H^{МАИ}\left[x_м, y_м\right] dx_м dy_м. \qquad (7.26)$$

Если сделать замену переменных $x' = x_{\text{м}} - x_p(t)$, $y' = y_{\text{м}} - y_p(t)$, то получим $dx' = dx_{\text{м}}$, $dy' = dy_{\text{м}}$, $x_{\text{м}} = x' + x_p(t)$, $y_{\text{м}} = y' + y_p(t)$, и выражение (7.26) преобразуется к виду

$$\Phi_{\lambda t}(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E_\lambda(x', y') H^{\text{МАИ}}\left[x' + x_p(t); y' + y_p(t)\right] dx'dy'. \quad (7.27)$$

Изменение знака в выражении (7.27) по сравнению с (7.22) означает, что относительное круговое перемещение осуществляется в обратном направлении.

Вращательное движение. При вращательном движении МАИ закон перемещения имеет вид

$$x_p = 0; \quad y_p = 0; \quad \varphi_p = \varphi_p(t) = \frac{2\pi}{T_0} t.$$

Тогда квазимонохроматический поток описывается выражением

$$\Phi_{\lambda t}(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E_\lambda(x', y') H^{\text{МАИ}}\left[x', y', \varphi_p(t)\right] dx'dy'. \quad (7.28)$$

В полярной системе координат, где аргументами являются r' и φ', выражение (7.28) имеет вид

$$\Phi_{\lambda t}(t) = \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{2\pi} E_\lambda(r', \varphi') H^{\text{МАИ}}\left[r', \varphi' - \frac{2\pi}{T_0} t\right] r'dr'd\varphi'. \quad (7.29)$$

Следует отметить, что при круговом и вращательном сканировании сигналы на выходе МАИ являются периодическими и могут быть представлены рядом Фурье:

$$\Phi_{\lambda t}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi_{\lambda tk} \exp\left(i \cdot 2\pi \frac{k}{T_0} t\right), \quad (7.30)$$

где $\Phi_{\lambda tk}$ — k-я гармоника квазимонохроматического потока,

$$\Phi_{\lambda tk} = \frac{1}{T_0}\int_{0}^{T_0} \Phi_{\lambda t}(t) \exp\left(-i \cdot 2\pi \frac{k}{T_0} t\right) dt.$$

Частотно-временной спектр квазимонохроматического потока излучения на выходе МАИ при круговом и вращательном движении определяется по формуле

$$\tilde{\Phi}_{\lambda t}(\nu_t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi_{\lambda tk}\delta\left(\nu_t - \frac{k}{T_0}\right). \qquad (7.31)$$

Для рассмотренных частных случаев частотно-временной спектр определяется достаточно просто. При более сложных законах движения транспаранта МАИ для вычисления зависимости потока излучения от времени и его частотно-временного спектра удобно использовать частотный метод.

Частотный метод определения потока излучения и его частотно-временного спектра на выходе подвижного транспаранта модулятора анализатора изображения

Для этого метода требуется заранее определить ПЧС $\tilde{\Phi}_{\lambda}(\nu_x, \nu_y; \varphi_p)$ квазимонохроматического потока излучения на выходе неподвижного МАИ.

Если известен ПЧС $\tilde{\Phi}_{\lambda}(\nu_x, \nu_y; \varphi_p)$ для неподвижного транспаранта МАИ, то при его движении по произвольному закону, описываемому системой параметрических уравнений

$$x_p = x_p(t);\ y_p = y_p(t);\ \varphi_p = \varphi_p(t),$$

зависимость квазимонохроматического потока от времени можно определить следующим образом:

$$\Phi_{\lambda t}(t) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}_{\lambda}(\nu_x, \nu_y; \varphi_p)\exp\left\{i \cdot 2\pi\left[x_p(t)\nu_x + y_p(t)\nu_y\right]\right\} d\nu_x d\nu_y. \qquad (7.32)$$

Рассмотрим методику определения частотно-временного спектра на выходе МАИ на примере линейного закона и кругового сканирования, а также при вращательном движении МАИ.

Линейное сканирование. Как отмечалось выше, при линейном сканировании (см. рис. 7.8) система параметрических уравнений имеет вид

$$x_p = x_p(t) = V_x t;\ y_p = 0;\ \varphi_p = 0.$$

С учетом этих уравнений выражение (7.32) запишем в виде

$$\Phi_{\lambda t}(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}_{\lambda}\left(\nu_x, \nu_y\right)\exp\left(i \cdot 2\pi V_x \nu_x t\right) d\nu_x d\nu_y, \qquad (7.33)$$

где в соответствии с формулой (7.5) ПЧС квазимонохроматического потока излучения на выходе МАИ определяется выражением

$$\tilde{\Phi}_{\lambda}\left(\nu_x, \nu_y\right) = \pi\tau\sin^2\sigma_A \tilde{L}_{\lambda}\left(\beta\nu_x, \beta\nu_y\right) \times$$
$$\times \tilde{H}_N^{\text{ОС}}\left(\nu_x, \nu_y\right)\tilde{H}^{*\text{МАИ}}\left(\nu_x, \nu_y\right). \qquad (7.34)$$

Для того чтобы получить ЧВС потока излучения, необходимо вычислить прямое преобразование Фурье от функции (7.33), тогда

$$\tilde{\Phi}_{\lambda t}\left(\nu_t\right) =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}_{\lambda}\left(\nu_x, \nu_y\right) d\nu_x d\nu_y \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(i \cdot 2\pi V_x \nu_x t\right)\exp\left(-i \cdot 2\pi\nu_t t\right) dt =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}_{\lambda}\left(\nu_x, \nu_y\right) d\nu_x d\nu_y \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-i \cdot 2\pi\left(\nu_t - V_x\nu_x\right)t\right] dt. \qquad (7.35)$$

Поскольку

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-i \cdot 2\pi\left(\nu_t - V_x\nu_x\right)t\right] dt = \delta\left(\nu_t - V_x\nu_x\right),$$

то, учитывая фильтрующее свойство δ-функции, получаем следующее выражение для ЧВС квазимонохроматического потока на выходе МАИ:

$$\tilde{\Phi}_{\lambda t}\left(\nu_t\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}_{\lambda}\left(\nu_x, \nu_y\right)\delta\left(\nu_t - V_x\nu_x\right) d\nu_x d\nu_y =$$
$$= \frac{1}{V_x}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}_{\lambda}\left(\nu_x, \nu_y\right)\delta\left(\frac{\nu_t}{V_x} - \nu_x\right) d\nu_x d\nu_y =$$
$$= \frac{1}{V_x}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}_{\lambda}\left(\frac{\nu_t}{V_x}, \nu_y\right) d\nu_y. \qquad (7.36)$$

Подставив (7.34) в (7.36), получим окончательное выражение для ЧВС потока в виде

$$\tilde{\Phi}_{\lambda t}(\nu_t) = \frac{\pi\tau\sin^2\sigma_A}{V_x}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde{L}_{\lambda}\left(\beta\frac{\nu_t}{V_x},\ \beta\nu_y\right)\tilde{H}_N^{\text{ОС}}\left(\frac{\nu_t}{V_x},\ \nu_y\right)\times$$

$$\times\,\tilde{H}^{*\text{МАИ}}\left(\frac{\nu_t}{V_x},\nu_y\right)d\nu_y. \qquad (7.37)$$

Таким образом, для определения ЧВС потока излучения на выходе МАИ при линейном сканировании необходимо знать ПЧС объекта, ОПФ ОС и ППФ МАИ.

Круговое сканирование. При круговом сканировании система параметрических уравнений, описывающая относительное перемещение транспаранта МАИ и изображения, имеет вид

$$x_p = x_p(t) = r_p\cos\frac{2\pi}{T_0}t;\quad y_p = y_p(t) = r_p\sin\frac{2\pi}{T_0}t;\quad \varphi_p = 0.$$

С учетом этих уравнений выражение (7.32) можно представить в виде

$$\Phi_{\lambda t}(t) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde{\Phi}_{\lambda}(\nu_x,\nu_y)\exp\left[i\cdot 2\pi r_p\left(\nu_x\cos\frac{2\pi}{T_0}t + \nu_x\cos\frac{2\pi}{T_0}t\right)\right]d\nu_x d\nu_y. \quad (7.38)$$

В соответствии с формулой (7.31) ЧВС при вращательном сканировании и круговом движении определяется значениями k-х гармоник спектра. Гармоники при таком периодическом движении определяются коэффициентами ряда Фурье:

$$\Phi_{\lambda tk} = \frac{1}{T_0}\int\limits_0^{T_0}\Phi_{\lambda t}(t)\exp\left(-i\cdot 2\pi\frac{k}{T_0}t\right)dt =$$

$$= \frac{1}{T_0}\int\limits_0^{T_0}\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde{\Phi}_{\lambda}(\nu_x,\nu_y)\exp\left[i\cdot 2\pi r_p\left(\nu_x\cos\frac{2\pi}{T_0}t + \nu_y\sin\frac{2\pi}{T_0}t\right)\right]d\nu_x d\nu_y\right\}\times$$

$$\times\exp\left(-i\cdot 2\pi\frac{k}{T_0}t\right)dt. \qquad (7.39)$$

Выразим для экспоненциальной функции, входящей в формулу (7.39), пространственные частоты в полярной системе координат. Тогда $\nu_x = \nu_r \cos\theta$, $\nu_y = \nu_r \sin\theta$, а аргумент экспоненты в круглых скобках имеет вид

$$\nu_x \cos\frac{2\pi}{T_0}t + \nu_y \sin\frac{2\pi}{T_0}t =$$

$$= \nu_r\left(\cos\theta\cos\frac{2\pi}{T_0}t + \sin\theta\sin\frac{2\pi}{T_0}t\right) =$$

$$= \nu_r \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t - \theta\right) = \nu_r \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{T_0}t - \theta\right). \qquad (7.40)$$

Следовательно, выражение (7.39) с учетом формул (7.40) можно представить в виде

$$\Phi_{\lambda tk} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}_\lambda\left(\nu_x, \nu_y\right)\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \exp\left[i\cdot 2\pi\left(r_p\nu_r \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{T_0}t - \theta\right) - \frac{k}{T_0}t\right)\right]dt\right\} d\nu_x d\nu_y. \qquad (7.41)$$

Рассмотрим выражение, содержащееся в фигурных скобках формулы (7.41). Если в этом выражении сделать замену переменной $u = \frac{2\pi}{T_0}t - \theta + \frac{\pi}{2}$, $dt = \frac{T_0}{2\pi}du$, то, учитывая периодичность подынтегральной функции, получаем

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}-\theta}^{2\pi+\frac{\pi}{2}-\theta} \exp\left[i\cdot 2\pi\left(r_p\nu_r \sin u - \frac{k\left(u+\theta-\pi/2\right)}{2\pi}\right)\right]du =$$

$$= \exp(-ik\theta)\exp\left(i\frac{\pi k}{2}\right)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp\left[i\left(2\pi r_p\nu_r \sin u - ku\right)\right]du =$$

$$= (i)^k \exp\left(-ik\theta\right) J_k\left(2\pi r_p\nu_r\right), \qquad (7.42)$$

где $J_k\left(2\pi r_p\nu_r\right)$ — функция Бесселя первого рода k-го порядка.

Поскольку $\nu_r = \sqrt{\nu_x{}^2 + \nu_y{}^2}$ и $\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{\nu_y}{\nu_x}\right)$, то окончательно формулу для вычисления k-х гармоник ЧВС можно представить в виде

$$\Phi_{\lambda tk} = (i)^k \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}_\lambda\left(\nu_x, \nu_y\right) J_k\left(2\pi r_p \sqrt{\nu_x{}^2 + \nu_y{}^2}\right) \times$$

$$\times \exp\left[-ik \operatorname{arctg}\left(\frac{\nu_y}{\nu_x}\right)\right] d\nu_x d\nu_y, \qquad (7.43)$$

где $\tilde{\Phi}_\lambda\left(\nu_x, \nu_y\right)$ — ПЧС на выходе неподвижного транспаранта МАИ, определяемого выражением (7.34).

Вращательное движение МАИ. При вращательном движении транспарант МАИ вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью и закон движения имеет вид

$$x_p = 0; \quad y_p = 0; \quad \varphi_p = \varphi_p(t) = \frac{2\pi}{T_0} t.$$

Тогда с учетом периодического закона сканирования выражение (7.32), описывающее зависимость квазимонохроматического потока от времени, можно представить следующим образом:

$$\Phi_{\lambda t}(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}_\lambda\left(\nu_x, \nu_y; \varphi_p(t)\right) d\nu_x d\nu_y =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}_\lambda\left(\nu_x, \nu_y\right) \tilde{H}^{*\text{МАИ}}\left(\nu_x, \nu_y; \varphi_p(t)\right) d\nu_x d\nu_y =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi_{\lambda tk} \exp\left(i \cdot 2\pi \frac{k}{T_0} t\right). \qquad (7.44)$$

Представив выражение (7.44) в полярной системе координат, получим

$$\Phi_{\lambda t}(t) = \int_0^{\infty} \nu_r \left\{ \int_0^{2\pi} \tilde{E}_\lambda\left(\nu_r, \theta\right) \tilde{H}^{*\text{МАИ}}\left(\nu_r, \theta; \varphi_p(t)\right) d\theta \right\} d\nu_r. \qquad (7.45)$$

При повороте МАИ на угол $\varphi_p(t) = \dfrac{2\pi}{T_0}t$ его функция пропускания в полярной системе координат представляется периодической функцией $H^{\text{МАИ}}(r', \varphi') = H^{\text{МАИ}}\left(r', \varphi' - \dfrac{2\pi}{T_0}t\right)$, а ППФ — периодической функцией $\tilde{H}^{\text{МАИ}}(\nu_r, \theta) = \tilde{H}^{\text{МАИ}}\left(\nu_r, \theta - \dfrac{2\pi}{T_0}t\right)$.

Следовательно, k-я гармоника ЧВС потока на выходе МАИ

$$\Phi_{\lambda tk} = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} \tilde{E}_{\lambda}(\nu_r, \theta)\times$$

$$\times\left[\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \tilde{H}^{*\text{МАИ}}\left(\nu_r, \theta - \frac{2\pi}{T_0}t\right)\exp\left(-i\cdot 2\pi\frac{k}{T_0}t\right)dt\right]\nu_r d\nu_r d\theta. \quad (7.46)$$

Введем обозначение

$$B_k(\nu_r, \theta) = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \tilde{H}^{*\text{МАИ}}\left(\nu_r, \theta - \frac{2\pi}{T_0}t\right)\exp\left(-i\cdot 2\pi\frac{k}{T_0}t\right)dt. \quad (7.47)$$

После замены переменной $\gamma = \theta - \dfrac{2\pi}{T_0}t$, $d\gamma = -\dfrac{2\pi}{T_0}dt$, получим

$$B_k(\nu_r, \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{\theta-2\pi}^{\theta} \tilde{H}^{*\text{МАИ}}(\nu_r, \gamma)\exp\left[-ik(\theta - \gamma)\right]d\gamma =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\exp(-ik\theta)\int_0^{2\pi} \tilde{H}^{*\text{МАИ}}(\nu_r, \gamma)\exp(ik\gamma)d\gamma. \quad (7.48)$$

Поскольку $\tilde{H}_{\tau}^{\text{МАИ}}(\nu_r, \gamma)$ является периодической функцией с периодом 2π по углу γ, разложим ее в ряд Фурье:

$$\tilde{H}^{\text{МАИ}}(\nu_r, \gamma) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{H}_m^{\text{МАИ}}(\nu_r)\exp(im\gamma), \quad (7.49)$$

где

$$\tilde{H}_m^{\text{МАИ}}(\nu_r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{H}^{\text{МАИ}}(\nu_r, \gamma)\exp(-im\gamma)\,d\gamma. \qquad (7.50)$$

Для $\tilde{H}^{*\text{МАИ}}(\nu_r, \gamma)$ запишем

$$\tilde{H}^{*\text{МАИ}}(\nu_r, \gamma) = \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{H}_m^{\text{МАИ}}(\nu_r)\exp(im\gamma)\right]^* =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{H}_m^{*\text{МАИ}}(\nu_r)\exp(-im\gamma). \qquad (7.51)$$

Подставив выражение (7.51) в (7.48), получим

$$B_k(\nu_r, \theta) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\exp(-ik\theta)\int_0^{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{H}_m^{*\text{МАИ}}(\nu_r)\exp(-im\gamma)\exp(ik\gamma)\,d\gamma. \qquad (7.52)$$

Применив свойство ортонормированности к интегралу в выражении (7.52), получим следующий результат:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp\left[i(k-m)\gamma\right]d\gamma = \begin{vmatrix} 1 & m = k; \\ 0 & m \neq k. \end{vmatrix}$$

Тогда можно записать

$$B_k(\nu_r, \theta) = \exp(-ik\theta)\,\tilde{H}_k^{*\text{МАИ}}(\nu_r). \qquad (7.53)$$

При вращении транспаранта МАИ функцию $\tilde{E}_\lambda(\nu_r, \theta)$ можно рассматривать как периодическую с периодом 2π. Выполнив аналогичные преобразования для $\tilde{E}_\lambda(\nu_r, \theta)$, получим

$$\tilde{E}_\lambda(\nu_r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{E}_{\lambda n}(\nu_r)\exp(in\theta), \qquad (7.54)$$

где

$$\tilde{E}_{\lambda n}(\nu_r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{E}_{\lambda n}(\nu_r, \gamma)\exp(-in\gamma)\,d\gamma. \qquad (7.55)$$

Подставляя формулы (7.53) и (7.54) в выражение (7.46) и используя свойство ортонормированности

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp\left[i(k-n)\theta\right]d\theta=\begin{vmatrix}1 & n=k;\\ 0 & n\neq k,\end{vmatrix}$$

получаем следующую формулу для k-й гармоники ЧВС потока при вращательном движении МАИ:

$$\Phi_{\lambda tk}=2\pi\int_0^{\infty}\tilde{E}_{\lambda k}(\nu_r)\tilde{H}_k^{*\text{МАИ}}(\nu_r)\nu_r d\nu_r, \qquad (7.56)$$

где

$$\tilde{E}_{\lambda k}(\nu_r)=\pi\tau\sin^2\sigma_A\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\tilde{L}_{\lambda}(\beta\nu_r,\theta)\tilde{H}_N^{\text{ОС}}(\nu_r,\theta)\exp(-ik\theta)d\theta\right\}; \qquad (7.57)$$

$$\tilde{H}_k^{*\text{МАИ}}(\nu_r)=\left[2\pi(-i)^k\int_0^{\infty}H_k^{\text{МАИ}}(r_м)J_k(2\pi\nu_r r_м)r_м dr_м\right]^*; \qquad (7.58)$$

$$H_k^{\text{МАИ}}(r_м)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\tilde{H}^{\text{МАИ}}(r_м,\varphi_м)\exp(-ik\varphi_м)d\varphi_м. \qquad (7.59)$$

7.2.4. Особенности описания сигнала и его пространственно-частотного спектра в угловых координатах

Если объект расположен в практической бесконечности, то можно считать, что изображение этого объекта формируется в фокальной плоскости объектива. При таком условии для описания сигналов применяют угловые координаты. Для описания объекта (в пространстве предметов) используют угловые координаты $\theta_x=x/L_D$ и $\theta_y=y/L_D$, где x и y — линейные координаты пространства предметов, а L_D — дистанция до объекта, в пространстве изображения — координаты $\theta'_x=x'/f'$ и $\theta'_y=y'/f'$, где x' и y' — линейные координаты плоскости изображения, а f' — фокусное расстояние. При описании функции пропускания МАИ применяют координаты $\theta_{мx}=x_м/f'$ и $\theta_{мy}=y_м/f'$, смещение МАИ относительно начала координат плоскости изображения задают координатами θ_{px} и θ_{py}. Удобство описания в угловых координатах обусловлено тем, что все перечис-

ленные угловые координаты имеют одинаковый масштаб, т. е. $\theta_x = \theta'_x = \theta_{мх} = \theta_{рх}$ и $\theta_y = \theta'_y = \theta_{му} = \theta_{ру}$. Поэтому выведенные в этом разделе формулы при использовании угловых координат будут отличаться от полученных ранее.

Квазимонохроматический поток излучения на выходе неподвижного, но смещенного МАИ определяется выражением

$$\Phi_\lambda\left(\theta_{рх}, \theta_{ру}, \varphi_p\right) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E_\lambda\left(\theta'_x, \theta'_y\right) H^{\text{МАИ}}\left(\theta'_x - \theta_{рх}, \theta'_y - \theta_{ру}, \varphi_p\right) d\theta'_x d\theta'_y. \qquad (7.60)$$

Для потока излучения на выходе неподвижного транспаранта МАИ ПЧС определяется зависимостью

$$\tilde{\Phi}_\lambda\left(\nu_{\theta x}, \nu_{\theta y}; \varphi_p\right) = \tilde{E}_\lambda\left(\nu_{\theta x}, \nu_{\theta y}\right)\tilde{H}^{*\text{МАИ}}\left(\nu_{\theta x}, \nu_{\theta y}; \varphi_p\right) =$$

$$= \pi\tau\sin^2\sigma_A \tilde{L}_\lambda\left(\nu_{\theta x}, \nu_{\theta y}\right)\tilde{H}_N^{\text{ОС}}\left(\nu_{\theta x}, \nu_{\theta y}\right)\tilde{H}^{*\text{МАИ}}\left(\nu_{\theta x}, \nu_{\theta y}; \varphi_p\right) \quad . \quad (7.61)$$

Пространственная передаточная функция транспаранта МАИ в угловых пространственных частотах $\nu_{\theta x}$ и $\nu_{\theta y}$ имеет вид

$$\tilde{H}^{\text{МАИ}}\left(\nu_{\theta x}, \nu_{\theta y}\right) =$$

$$= \tilde{H}_0^{\text{МАИ}}\left(\nu_{\theta x}, \nu_{\theta y}\right)\sum_{k=0}^{N-1}\exp\left[-i\cdot 2\pi\left(\nu_{\theta x}\theta_{мх}^k + \nu_{\theta y}\theta_{мх}^k\right)\right], \qquad (7.62)$$

где $\theta_{мх}^k$, $\theta_{мх}^k$ — угловые координаты k-го элемента транспаранта МАИ.

В полярной системе координат ППФ МАИ представляется как

$$\tilde{H}^{\text{МАИ}}\left(\nu_{\theta r}, \theta\right) = \sum_{k=0}^{N-1}\tilde{H}_0^{\text{МАИ}}\left(\nu_{\theta r}, \theta - k\cdot 2\varphi_0\right). \qquad (7.63)$$

Для подвижного МАИ в общем случае сложного движения закон относительного перемещения описывается следующей системой параметрических уравнений:

$$\theta_{рх} = \theta_{рх}(t);\ \ \theta_{ру} = \theta_{ру}(t);\ \ \varphi_p = \varphi_p(t). \qquad (7.64)$$

При поступательном движении эта система имеет вид

$$\theta_{px} = \theta_{px}(t), \;\; \theta_{py} = \theta_{py}(t) \text{ и } \varphi_p = 0. \qquad (7.65)$$

Тогда временной поток на выходе МАИ определяется выражением

$$\Phi_{\lambda t}(t) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E_\lambda\left(\theta'_x, \theta'_y\right) H^{\text{МАИ}}\left[\theta'_x - \theta_{px}(t), \theta'_y - \theta_{py}(t)\right] d\theta'_x d\theta'_y. \qquad (7.66)$$

При линейном сканировании система параметрических уравнений имеет вид

$$\theta_{px} = \omega_{px} t; \;\; \theta_{py} = 0; \;\; \varphi_p = 0, \qquad (7.67)$$

а временной поток на выходе МАИ определяется как

$$\Phi_{\lambda t}(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E_\lambda\left(\theta'_x, \theta'_y\right) H^{\text{МАИ}}\left[\theta'_x - \omega_{px} t, \theta'_y\right] d\theta'_x d\theta'_y, \qquad (7.68)$$

где $\omega_{px} = V_x / f'$ — угловая скорость линейного перемещения.

На выходе МАИ ЧВС потока можно вычислить, взяв преобразование Фурье от выражения (7.68), а именно $\tilde{\Phi}_{\lambda t}(\nu_t) = F\{\Phi_{\lambda t}(t)\}$. Или, используя частотный метод, получаем следующее выражение:

$$\tilde{\Phi}_{\lambda t}(\nu_t) = \frac{\pi\tau \sin^2 \sigma_A}{\omega_{px}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{L}_\lambda\left(\beta \frac{\nu_t}{\omega_{px}}, \nu_{\theta y}\right) \tilde{H}_N^{\text{ОС}}\left(\frac{\nu_t}{\omega_{px}}, \nu_{\theta y}\right) \times$$

$$\times \tilde{H}^{*\text{МАИ}}\left(\frac{\nu_t}{\omega_{px}}, \nu_{\theta y}\right) d\nu_{\theta y}. \qquad (7.69)$$

При вращательном движении система параметрических уравнений имеет вид

$$\theta_{px} = 0; \;\; \theta_{py} = 0; \;\; \varphi_p = \omega_{pr} t, \qquad (7.70)$$

где $\omega_{pr} = 2\pi / T_0$.

В этом случае временной поток на выходе МАИ определяется выражением

$$\Phi_{\lambda t}(t) = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} E_{\lambda}(\theta'_r, \varphi') H^{\text{МАИ}}\left[\theta'_r, \varphi' - \omega_{pr} t\right] \theta'_r d\theta'_r d\varphi', \qquad (7.71)$$

а ЧВС — формулой (7.31), т. е.

$$\tilde{\Phi}_{\lambda t}(\nu_t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi_{\lambda tk} \delta\left(\nu_t - \frac{k}{T_0} t\right).$$

7.3. Преобразование случайных оптических сигналов модулятором анализатора изображения

Описание преобразования МАИ случайных оптических сигналов рассмотрим при следующих допущениях. Во-первых, поле яркости в пространстве предметов представляет собой случайное однородное поле с нормальным законом распределения, реализации которого описываются пространственным распределением квазимонохроматической яркости $L_{\lambda}^{\text{сл}}(x, y)$. Во-вторых, будем считать, что ОС, формирующая изображение реализаций этого поля, является пространственно инвариантной.

Тогда изображение случайного поля представляет собой реализации квазимонохроматической облученности $E_{\lambda}^{\text{сл}}(x', y')$, также являющиеся случайным однородным полем с нормальным законом распределения. Достаточным описанием такого поля являются математическое ожидание и корреляционная функция или спектральная плотность, для которых выполняются условия

$$m_E = \text{const};$$

$$Kr_E(x'_2 - x'_1, y'_2 - y'_1) = Kr_E(\xi', \eta');$$

$$D_E = \text{const}.$$

При принятых допущениях рассмотрим процесс преобразования случайного поля облученности сначала неподвижным, а затем подвижным транспарантом МАИ.

7.3.1. Преобразование случайного поля облученности неподвижным модулятором анализатора изображения

Пусть изопланатическая ОС формирует случайное поле облученности в пределах углового поля ОЭС. В плоскости изображения ОС, связанной с системой координат $x'0'y'$, расположена плоскость транспаранта МАИ, с которым связана система координат $x_м 0_м y_м$. Система координат $x'0'y'$ неподвижна, а система координат $x_м 0_м y_м$ может быть смещена относительно системы координат изображения. Для упрощения математических выкладок будем предварительно считать, что смещение транспаранта МАИ относительно системы координат, связанной с изображением случайного поля освещенности (рис. 7.13), определяется вектором $\vec{r}_p$, а поворот МАИ отсутствует.

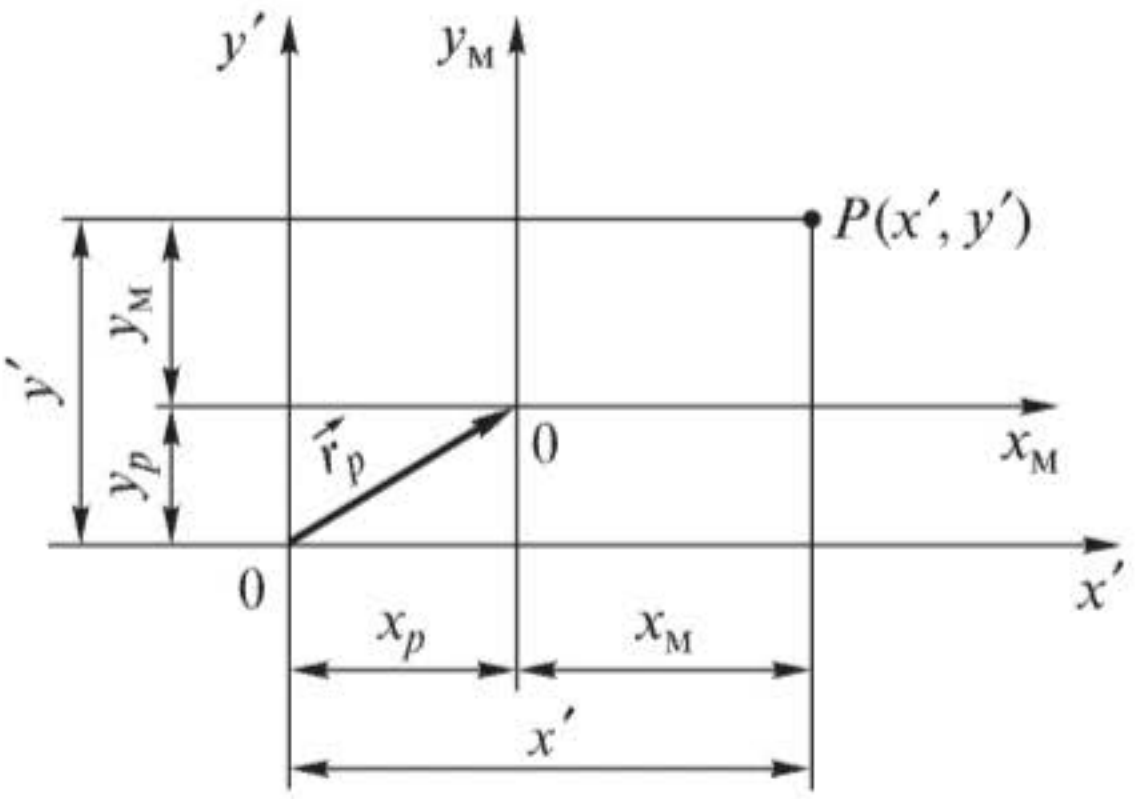


Рис. 7.13. Взаимное положение систем координат плоскости изображения и транспаранта МАИ

Тогда функция, описывающая реализации случайного квазимонохроматического потока излучения на выходе транспаранта МАИ, связана с реализациями случайного поля квазимонохроматической облученности функцией взаимной ковариации

$$\Phi_\lambda^{\text{сл}}(x_p, y_p) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E_\lambda^{\text{сл}}(x', y') H^{\text{МАИ}}(x' - x_p, y' - y_p)\,dx'dy'. \quad (7.72)$$

Выполнив в выражении (7.72) замену переменных $x' - x_p = u$ и $y' - y_p = v$, при которой $dx' = du$ и $dy' = dv$, получим выражение

$$\Phi_{\lambda}^{\text{сл}}(x_p, y_p) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E_{\lambda}^{\text{сл}}(u + x_p, v + y_p) H^{\text{МАИ}}(u, v) du dv. \quad (7.73)$$

Реализации случайного поля квазимонохроматической облученности представим суммой центрированной случайной функции $\dot{E}_{\lambda}^{\text{сл}}(x', y')$ и ее математического ожидания m_E:

$$E_{\lambda}^{\text{сл}}(x', y') = \dot{E}_{\lambda}^{\text{сл}}(x', y') + m_E. \quad (7.74)$$

Подставив сумму (7.74) в выражение (7.73), получим

$$\Phi_{\lambda}^{\text{сл}}(x_p, y_p) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\dot{E}_{\lambda}^{\text{сл}}(u + x_p, v + y_p) + m_E\right] H^{\text{МАИ}}(u, v) du dv =$$

$$= \dot{\Phi}_{\lambda}^{\text{сл}}(x_p, y_p) + m_{\Phi}, \quad (7.75)$$

где $\dot{\Phi}_{\lambda}^{\text{сл}}(x_p, y_p)$ — центрированная реализация потока излучения на выходе транспаранта МАИ.

Математическое ожидание m_{Φ} реализации потока излучения определяется следующим образом:

$$\Phi_{\lambda}^{\text{сл}}(x_p, y_p) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E_{\lambda}^{\text{сл}}(u + x_p, v + y_p) H^{\text{МАИ}}(u, v) du dv, \quad (7.76)$$

$$m_{\Phi} = m_E \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H^{\text{МАИ}}(u, v) du dv. \quad (7.77)$$

Корреляционная функция потока излучения на выходе неподвижного транспаранта МАИ в соответствии с определением имеет вид

$$Kr_{\Phi}(\xi_p, \eta_p) = M\left\{\dot{\Phi}_{\lambda}^{\text{сл}}(x_p, y_p)\dot{\Phi}_{\lambda}^{\text{сл}}(x_p + \xi_p, y_p + \eta_p)\right\}. \quad (7.78)$$

Подставив выражение (7.76) в формулу (7.78), получим

$$Kr_{\Phi}(\xi_p, \eta_p) =$$

$$= M\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \dot{E}_{\lambda}^{\text{сл}}(u_1 + x_p, v_1 + y_p) H^{\text{МАИ}}(u_1, v_1) du_1 dv_1 \times \right.$$

$$\left. \times \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \dot{E}_{\lambda}^{\text{сл}}(u_2 + x_p + \xi_p, v_2 + y_p + \eta_p) H^{\text{МАИ}}(u_2, v_2) du_2 dv_2 \right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} M\left\{\dot{E}_{\lambda}^{\text{сл}}(u_1 + x_p, v_1 + y_p) \times \right.$$

$$\left. \times \dot{E}_{\lambda}^{\text{сл}}(u_2 + x_p + \xi_p, v_2 + y_p + \eta_p)\right\} \times$$

$$\times H^{\text{МАИ}}(u_1, v_1) H^{\text{МАИ}}(u_2, v_2) du_1 dv_1 du_2 dv_2. \qquad (7.79)$$

В выражении (7.79) оператор математического ожидания определяет корреляционную функцию случайного поля облученности:

$$Kr_E(u_2 - u_1 + \xi_p, v_2 - v_1 + \eta_p) =$$

$$= M\left\{\dot{E}_{\lambda}^{\text{сл}}(u_1 + x_p, v_1 + y_p) \dot{E}_{\lambda}^{\text{сл}}(u_2 + x_p + \xi_p, v_2 + y_p + \eta_p)\right\}. \qquad (7.80)$$

Подставив соотношение (7.80) в выражение (7.79), получим окончательную корреляционую функцию потока излучения на выходе МАИ:

$$Kr_{\Phi}(\xi_p, \eta_p) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} Kr_E(u_2 - u_1 + \xi_p, v_2 - v_1 + \eta_p) \times$$

$$\times H^{\text{МАИ}}(u_1, v_1) H^{\text{МАИ}}(u_2, v_2) du_1 dv_1 du_2 dv_2. \qquad (7.81)$$

Дисперсия случайного потока излучения на выходе МАИ

$$D_{\Phi} = Kr_{\Phi}(0, 0) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} Kr_E(u_2 - u_1, v_2 - v_1) \times$$

$$\times H^{\text{МАИ}}(u_1, v_1) H^{\text{МАИ}}(u_2, v_2) du_1 dv_1 du_2 dv_2. \qquad (7.82)$$

Таким образом, случайное поле потока излучения на выходе МАИ является однородным.

Пространственно-частотный спектр случайного поля потока излучения на выходе неподвижного транспаранта МАИ определяется следующим образом:

$$\tilde{K}r_{\Phi}\left(\nu_x, \nu_y\right) = F\left\{Kr_{\Phi}\left(\xi_p, \eta_p\right)\right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} Kr_{\Phi}\left(\xi_p, \eta_p\right)\exp\left[-i\cdot 2\pi\left(\nu_x\xi_p + \nu_y\eta_p\right)\right]d\xi_p d\eta_p. \qquad (7.83)$$

С учетом выражения (7.81) представим (7.83) в виде произведения трех двукратных интегралов:

$$\tilde{K}r_{\Phi}\left(\nu_x, \nu_y\right) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H^{\text{МАИ}}\left(u_1, v_1\right)du_1dv_1 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H^{\text{МАИ}}\left(u_2, v_2\right)du_2dv_2 \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} Kr_E\left(u_2 - u_1 + \xi_p, v_2 - v_1 + \eta_p\right)\times$$

$$\times \exp\left[-i\cdot 2\pi\left(\nu_x\xi_p + \nu_y\eta_p\right)\right]d\xi_p d\eta_p. \qquad (7.84)$$

Проведем замену переменных в третьем интеграле: $u_2 - u_1 + \xi_p = p$, $v_2 - v_1 + \eta_p = q$ $d\xi_p = dp$, $d\eta_p = dq$, тогда выражение (7.84) преобразуется к виду

$$\tilde{K}r_{\Phi}\left(\nu_x, \nu_y\right) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H^{\text{МАИ}}\left(u_1, v_1\right)\exp\left[-i\cdot 2\pi\left(\nu_x u_1 + \nu_y v_1\right)\right]du_1dv_1 \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H^{\text{МАИ}}\left(u_2, v_2\right)\exp\left[-i\cdot 2\pi\left(\left(-\nu_y\right)u_2 + \left(-\nu_y\right)v_2\right)\right]du_2dv_2 \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} Kr_E\left(p, q\right)\exp\left[-i\cdot 2\pi\left(\nu_x p + \nu_y q\right)\right]dpdq =$$

$$= \tilde{K}r_E\left(\nu_x, \nu_y\right)\tilde{H}^{\text{МАИ}}\left(\nu_x, \nu_y\right)\tilde{H}^{\text{МАИ}}\left(-\nu_x, -\nu_y\right). \qquad (7.85)$$

Поскольку функция $H^{\text{МАИ}}\left(x_{\text{м}}, y_{\text{м}}\right) = H^{*\text{МАИ}}\left(x_{\text{м}}, y_{\text{м}}\right)$ действительная, то $\tilde{H}^{\text{МАИ}}\left(-\nu_x, -\nu_y\right) = \tilde{H}^{*\text{МАИ}}\left(\nu_x, \nu_y\right)$. Поэтому оконча-

тельное выражение для ПЧС случайного поля потока излучения на выходе МАИ примет вид

$$\tilde{K}r_{\Phi}(\nu_x, \nu_y) = \tilde{K}r_E(\nu_x, \nu_y)\left|\tilde{H}^{\text{МАИ}}(\nu_x, \nu_y)\right|^2 =$$

$$= \left(\pi\tau\beta\sin^2\sigma'_{A'}\right)^2 \tilde{K}r_L(\beta\nu_x, \beta\nu_y)\left|\tilde{H}_N^{\text{ОС}}(\nu_x, \nu_y)\right|^2 \times$$

$$\times\left|\tilde{H}^{\text{МАИ}}(\nu_x, \nu_y)\right|^2. \qquad (7.86)$$

Дисперсия случайного поля потока излучения на выходе МАИ

$$D_{\Phi} = Kr_{\Phi}(0,0) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{K}r_{\Phi}(\nu_x, \nu_y)d\nu_x d\nu_y. \qquad (7.87)$$

Если известен ПЧС случайного поля потока излучения на выходе МАИ, то корреляционная функция на выходе неподвижного МАИ может быть определена путем вычисления обратного преобразования Фурье:

$$Kr_{\Phi}(\xi_p, \eta_p) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{K}r_E(\nu_x, \nu_y)\left|\tilde{H}^{\text{МАИ}}(\nu_x, \nu_y)\right|^2 \times$$

$$\times \exp\left[i\cdot 2\pi\left(\nu_x\xi_p + \nu_y\eta_p\right)\right]d\nu_x d\nu_y. \qquad (7.88)$$

Описание преобразования случайного сигнала в угловых координатах при неподвижном транспаранте МАИ. Для описания сигнала в пространстве изображений используют угловые координаты $\theta'_x = x'/f'$ и $\theta'_y = y'/f'$, функцию пропускания МАИ задают в угловых координатах $\theta_{\text{мх}} = x_{\text{м}}/f'$ и $\theta_{\text{му}} = y_{\text{м}}/f'$, а положение транспаранта МАИ относительно начала координат плоскости изображения определяют значениями θ_{px} и θ_{py}.

Тогда случайное поле на выходе МАИ характеризуется математическим ожиданием m_{Φ} и корреляционной функцией $Kr_{\Phi}(\xi_{\theta p}, \eta_{\theta p})$ или спектральной плотностью $\tilde{K}r_{\Phi}(\nu_{\theta x}, \nu_{\theta y})$, а также дисперсией D_{Φ}, которые соответственно описываются следующими зависимостями:

$$m_{\Phi} = m_E\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H^{\text{МАИ}}(\theta_{\text{мх}}, \theta_{\text{му}})d\theta_{\text{мх}}d\theta_{\text{му}}; \qquad (7.89)$$

$$Kr_{\Phi}\left(\mu_{px}, \mu_{py}\right) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} Kr_E\left(\theta_{px1} - \theta_{px2} + \mu_{px},\ \theta_{py1} - \theta_{py2} + \mu_{py}\right) \times$$

$$\times H^{\text{МАИ}}\left(\theta_{px1}, \theta_{py1}\right) H^{\text{МАИ}}\left(\theta_{px2}, \theta_{py2}\right) d\theta_{px1} d\theta_{py1} d\theta_{px2} d\theta_{py2}; \quad (7.90)$$

$$\tilde{K}r_{\Phi}\left(\nu_{\theta x}, \nu_{\theta y}\right) = \tilde{K}r_E\left(\nu_{\theta x}, \nu_{\theta y}\right)\left|\tilde{H}^{\text{МАИ}}\left(\nu_{\theta x}, \nu_{\theta y}\right)\right|^2 =$$

$$= \left(\pi\tau\sin^2\sigma'_{A'}\right)^2 \tilde{K}r_L\left(\nu_{\theta x}, \nu_{\theta y}\right)\left|\tilde{H}_N^{\text{ОС}}\left(\nu_{\theta x}, \nu_{\theta y}\right)\right|^2 \times$$

$$\times\left|\tilde{H}^{\text{МАИ}}\left(\nu_{\theta x}, \nu_{\theta y}\right)\right|^2; \quad (7.91)$$

$$D_{\Phi} = Kr_{\Phi}(0,0) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{K}r_{\Phi}\left(\nu_{\theta x}, \nu_{\theta y}\right) d\nu_{\theta x} d\nu_{\theta y}. \quad (7.92)$$

При известном ПЧС случайного поля потока излучения на выходе МАИ корреляционная функция на выходе неподвижного МАИ может быть определена путем вычисления обратного преобразования Фурье:

$$Kr_{\Phi}\left(\mu_{px}, \mu_{py}\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{K}r_E\left(\nu_{\theta x}, \nu_{\theta y}\right)\left|\tilde{H}^{\text{МАИ}}\left(\nu_{\theta x}, \nu_{\theta y}\right)\right|^2 \times$$

$$\times \exp\left[i \cdot 2\pi\left(\nu_{\theta x}\mu_{px} + \nu_{\theta y}\mu_{py}\right)\right] d\nu_{\theta x} d\nu_{\theta y}. \quad (7.93)$$

Общий случай. Обобщим полученные результаты на общий случай, когда неподвижный МАИ имеет смещение не только относительно начала системы координат $x'0'y'$, определяемое вектором $\vec{r}_p$, но и повернут на угол φ_p вокруг оси, проходящей через начало системы координат $x_{\text{м}}0_{\text{м}}y_{\text{м}}$, связанной с МАИ.

В этом случае центрированная реализация потока излучения на выходе МАИ определяется выражением

$$\dot{\Phi}_{\lambda}^{\text{сл}}\left(x_p, y_p, \varphi_p\right) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \dot{E}_{\lambda}^{\text{сл}}\left(u + x_p, v + y_p\right) H^{\text{МАИ}}\left(u, v, \varphi_p\right) du dv. \quad (7.94)$$

Корреляционная функция потока излучения на выходе МАИ в соответствии с определением будет иметь вид

$$Kr_{\Phi}\left(\xi_p, \eta_p, \varphi_{p1}, \varphi_{p2}\right) =$$

$$= M\left\{\dot{\Phi}_{\lambda}^{\text{сл}}\left(x_p, y_p, \varphi_{p1}\right)\dot{\Phi}_{\lambda}^{\text{сл}}\left(x_p + \xi_p, y_p + \eta_p, \varphi_{p2}\right)\right\}. \qquad (7.95)$$

Подставим выражение (7.94) в формулу (7.78), учитывая, что $\xi_p = x_{p2} - x_{p1}$, $\eta_p = y_{p2} - y_{p1}$ и $\gamma_p = \varphi_{p2} - \varphi_{p1}$, получаем выражение для корреляционной функции потока излучения на выходе МАИ в следующем виде:

$$Kr_{\Phi}\left(\xi_p, \eta_p, \varphi_p, \varphi_p + \gamma_p\right) =$$

$$= M\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \dot{E}_{\lambda}^{\text{сл}}\left(u_1 + x_p, v_1 + y_p\right) H^{\text{МАИ}}\left(u_1, v_1, \varphi_p\right) du_1 dv_1 \times\right.$$

$$\left.\times \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \dot{E}_{\lambda}^{\text{сл}}\left(u_2 + x_p + \xi_p, v_2 + y_p + \eta_p\right) H^{\text{МАИ}}\left(u_2, v_2, \varphi_p + \gamma_p\right) du_2 dv_2\right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} M\left\{\dot{E}_{\lambda}^{\text{сл}}\left(u_1 + x_p, v_1 + y_p\right)\dot{E}_{\lambda}^{\text{сл}}\left(u_2 + x_p + \xi_p, v_2 + y_p + \eta_p\right)\right\}\times$$

$$\times H^{\text{МАИ}}\left(u_1, v_1, \varphi_p\right) H^{\text{МАИ}}\left(u_2, v_2, \varphi_p + \gamma_p\right) du_1 dv_1 du_2 dv_2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} Kr_E\left(u_2 - u_1 + \xi_p, v_2 - v_1 + \eta_p\right)\times$$

$$\times H^{\text{МАИ}}\left(u_1, v_1, \varphi_p\right) H^{\text{МАИ}}\left(u_2, v_2, \varphi_p + \gamma_p\right) du_1 dv_1 du_2 dv_2. \qquad (7.96)$$

Соответственно дисперсия потока излучения на выходе МАИ

$$D_{\Phi} = Kr_{\Phi}\left(0, 0, \varphi_p, \varphi_p + \gamma_p\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} Kr_E\left(u_2 - u_1, v_2 - v_1\right)\times$$

$$\times H^{\text{МАИ}}\left(u_1, v_1, \varphi_p\right) H^{\text{МАИ}}\left(u_2, v_2, \varphi_p + \gamma_p\right) du_1 dv_1 du_2 dv_2. \qquad (7.97)$$

Пространственная спектральная плотность случайного поля потока излучения на выходе МАИ определяется выражением

$$\tilde{K}r_{\Phi}\left(\nu_x, \nu_y, \varphi_p, \varphi_p + \gamma_p\right) = F\left\{Kr_{\Phi}\left(\xi_p, \eta_p, \varphi_p, \varphi_p + \gamma_p\right)\right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} Kr_E\left(u_2 - u_1 + \xi_p, v_2 - v_1 + \eta_p\right)\times$$

$$\times H^{\text{МАИ}}\left(u_1, v_1, \varphi_p\right)H^{\text{МАИ}}\left(u_2, v_2, \varphi_p + \gamma_p\right)\times$$

$$\times\exp\left[-i\cdot 2\pi\left(\nu_x\xi_p + \nu_y\eta_p\right)\right]du_1dv_1du_2dv_2d\xi_pd\eta_p =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H^{\text{МАИ}}\left(u_1, v_1, \varphi_p\right)du_1dv_1\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H^{\text{МАИ}}\left(u_2, v_2, \varphi_p + \gamma_p\right)\times$$

$$\times du_2dv_2\times\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} Kr_E\left(u_2 - u_1 + \xi_p, v_2 - v_1 + \eta_p\right)\times$$

$$\times\exp\left[-i\cdot 2\pi\left(\nu_x\xi_p + \nu_y\eta_p\right)\right]d\xi_pd\eta_p. \qquad (7.98)$$

Выполнив замену переменных в третьем интеграле $u_2 - u_1 + \xi_p = p$, $v_2 - v_1 + \eta_p = q$, $d\xi_p = dp$, $d\eta_p = dq$, получим следующее выражение:

$$\tilde{K}r_{\Phi}\left(\nu_x, \nu_y, \varphi_p, \varphi_p + \gamma_p\right) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H^{\text{МАИ}}\left(u_1, v_1, \varphi_p\right)\exp\left[-i\cdot 2\pi\left(\nu_x u_1 + \nu_y v_1\right)\right]du_1dv_1\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H^{\text{МАИ}}\left(u_2, v_2, \varphi_p + \gamma_p\right)\exp\left[-i\cdot 2\pi\left(\left(-\nu_y\right)u_2 + \left(-\nu_y\right)v_2\right)\right]\times$$

$$\times du_2dv_2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} Kr_E\left(p, q\right)\exp\left[-i\cdot 2\pi\left(\nu_x p + \nu_y q\right)\right]dpdq =$$

$$= \tilde{K}r_E\left(\nu_x, \nu_y\right)\tilde{H}^{\text{МАИ}}\left(\nu_x, \nu_y, \varphi_p\right)\tilde{H}^{\text{МАИ}}\left(-\nu_x, -\nu_y, \varphi_p + \gamma_p\right) =$$

$$= \tilde{K}r_E\left(\nu_x, \nu_y\right)\tilde{H}^{\text{МАИ}}\left(\nu_x, \nu_y, \varphi_p\right)\tilde{H}^{*\text{МАИ}}\left(\nu_x, \nu_y, \varphi_p + \gamma_p\right). \qquad (7.99)$$

7.3.2. Преобразование случайного поля облученности подвижным модулятором анализатора изображения

Пусть МАИ совершает движение по некоторой траектории, которая описывается системой параметрических уравнений

$$x_p = x_p(t);\ y_p = y_p(t);\ \varphi_p = \varphi_p(t).$$

Обозначим разность значений координат для моментов времени t и $t+\tau$:

$$\xi_p(t, t+\tau) = x_p(t+\tau) - x_p(t);$$

$$\eta_p(t, t+\tau) = y_p(t+\tau) - y_p(t);$$

$$\gamma_p(t, t+\tau) = \gamma_p(t+\tau) - \gamma_p(t).$$

В общем случае корреляционная функция случайного сигнала на выходе подвижного МАИ является сложной функцией времени и может быть представлена в виде

$$Kr_{\Phi}\left[\xi_p(t, t+\tau);\ \eta_p(t, t+\tau);\ \varphi_p(t);\ \varphi_p(t+\tau)\right] = Kr_{\Phi t}(t, t+\tau). \quad (7.100)$$

Если закон движения МАИ таков, что отсутствует пропорциональность между значением временного интервала $\tau = t_2 - t_1$ и приращениями соответствующих перемещений

$$\xi_p(t, t+\tau) \neq k_1\tau, \quad \eta_p(t, t+\tau) \neq k_2\tau, \quad \gamma_p(t, t+\tau) \neq k_3\tau,$$

где k_1, k_2, k_3 — постоянные коэффициенты, то даже при однородном случайном поле облученности поток излучения на выходе МАИ представляет собой нестационарный случайный процесс. В частном случае линейного сканирования, когда МАИ перемещается с постоянной скоростью в направлении одной из координат, поток излучения на выходе МАИ является стационарным случайным процессом. Рассмотрим этот случай.

Линейное сканирование МАИ. Пусть МАИ перемещается с постоянной скоростью V_x вдоль оси $0'x'$ (рис. 7.14). При этом закон движения транспаранта МАИ определяется системой параметрических уравнений $x_p = x_p(t) = V_x t;\ y_p = 0;\ \varphi_p = 0.$

Разность значений координат для моментов времени t и $t+\tau$ определяется выражениями

$$\xi_p(t, t+\tau) = x_p(t+\tau) - x_p(t) =$$
$$= V_x(t+\tau) - V_x t = V_x\tau = \xi_p(\tau);$$

$$\eta_p(t, t+\tau) = y_p(t+\tau) - y_p(t) = 0;$$

$$\gamma_p(t, t+\tau) = \gamma_p(t+\tau) - \gamma_p(t) = 0.$$

Следовательно, при линейном сканировании корреляционная функция реализаций случайного сигнала на выходе подвижного МАИ имеет вид

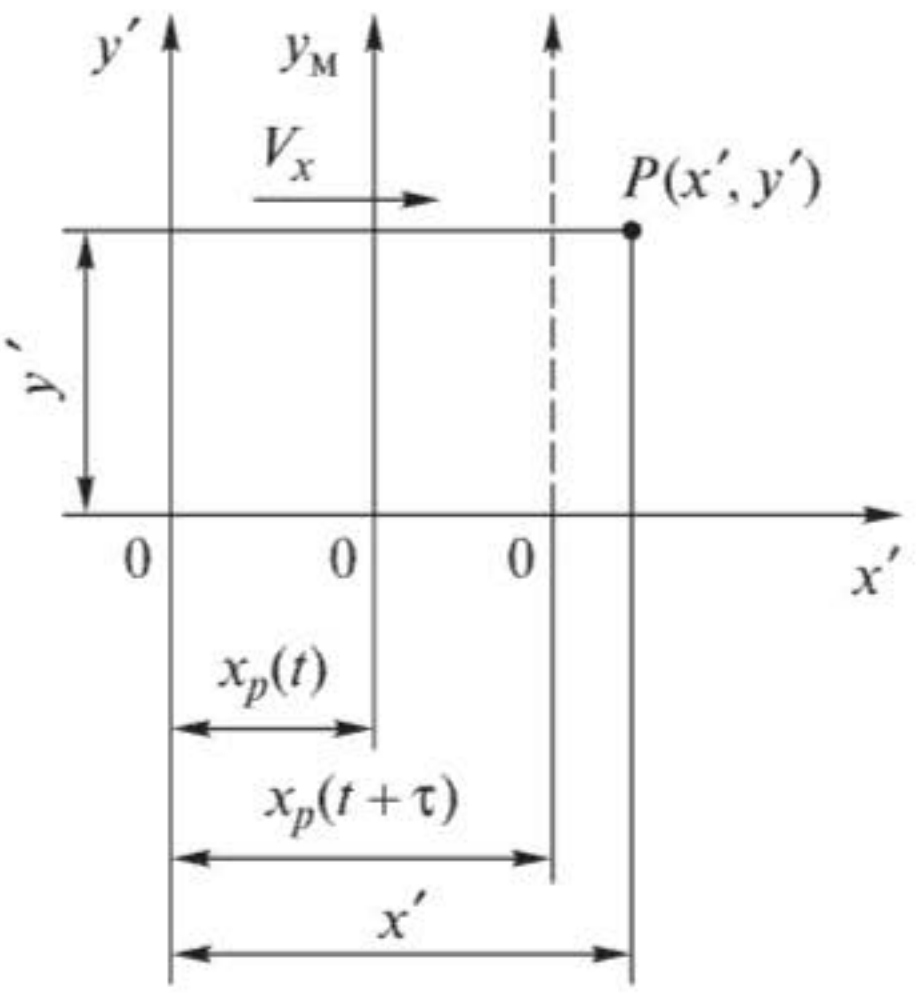


Рис. 7.14. Перемещение транспаранта МАИ при линейном сканировании

$$Kr_{\Phi}\left[\xi_p(\tau), 0, 0\right] = Kr_{\Phi t}(\tau). \qquad (7.101)$$

Поэтому случайный сигнал при линейном сканировании МАИ является стационарным.

Круговое сканирование МАИ. Примеры реализации кругового сканирования приведены на рис. 7.9–7.12. Независимо от того, перемещается МАИ или изображение, закон относительного движения при круговом сканировании описывается системой параметрических уравнений

$$x_p = x_p(t) = r_p \cos\frac{2\pi}{T_0}t;$$

$$y_p = y_p(t) = r_p \sin\frac{2\pi}{T_0}t;$$

$$\varphi_p = 0,$$

где r_p, T_0 — радиус и период кругового сканирования.

Разность значений координат для моментов времени t и $t+\tau$:

$$\xi_p(t, t+\tau) = r_p\left[\cos\frac{2\pi}{T_0}(t+\tau) - \cos\frac{2\pi}{T_0}t\right] \neq k_1\tau;$$

$$\eta_p(t, t+\tau) = r_p\left[\sin\frac{2\pi}{T_0}(t+\tau) - \sin\frac{2\pi}{T_0}t\right] \neq k_2\tau;$$

$$\gamma_p(t, t+\tau) = 0.$$

Следовательно, случайный временной поток на выходе МАИ при круговом сканировании является нестационарным случайным процессом.

Если известен ПЧС случайного поля потока излучения на выходе МАИ, то корреляционная функция на выходе неподвижного МАИ может быть определена по формуле (7.78):

$$Kr_{\Phi}\left[\xi_p(t, t+\tau), \eta_p(t, t+\tau)\right] = Kr_{\Phi t}(t, t+\tau) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{K}r_E(\nu_x, \nu_y)\left|\tilde{H}^{\text{МАИ}}(\nu_x, \nu_y)\right|^2 \times$$

$$\times \exp\left\{i \cdot 2\pi\left[\nu_x\xi_p(t, t+\tau) + \nu_y\eta_p(t, t+\tau)\right]\right\} d\nu_x d\nu_y. \qquad (7.102)$$

Нестационарность сигнала на выходе МАИ можно исключить путем усреднения сигнала. При периодическом движении МАИ, в частности, при вращательном или круговом сканировании (рис. 7.15, 7.16), перемещение транспаранта МАИ определяется,

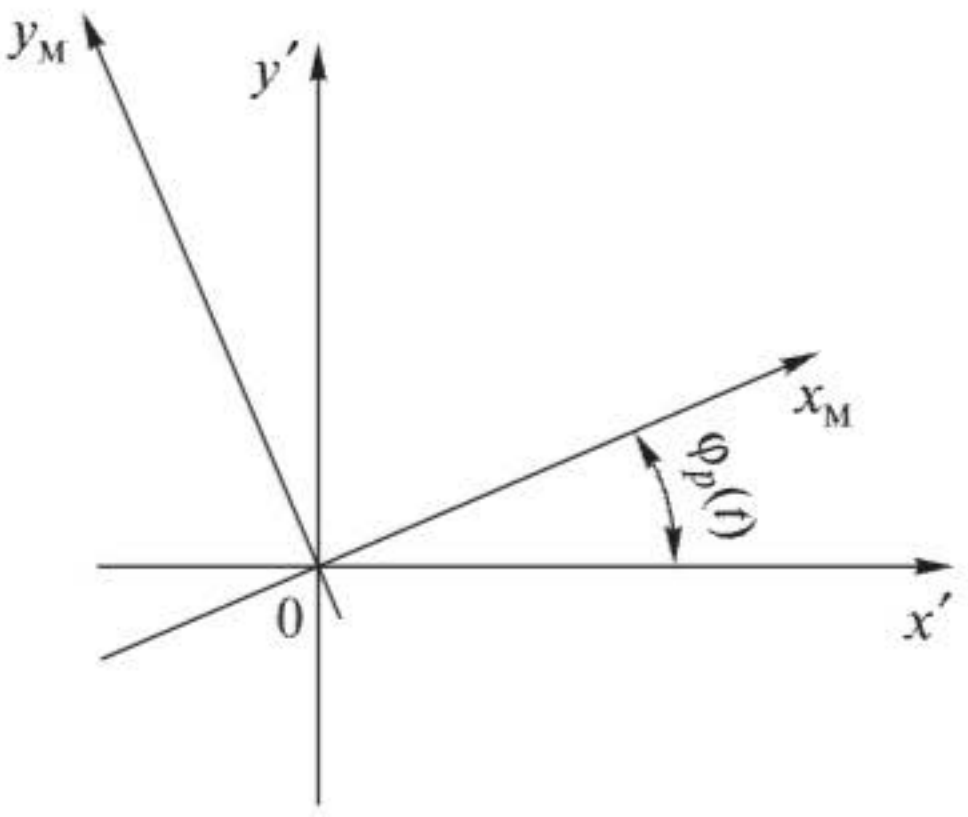


Рис. 7.15. Вращательное сканирование МАИ

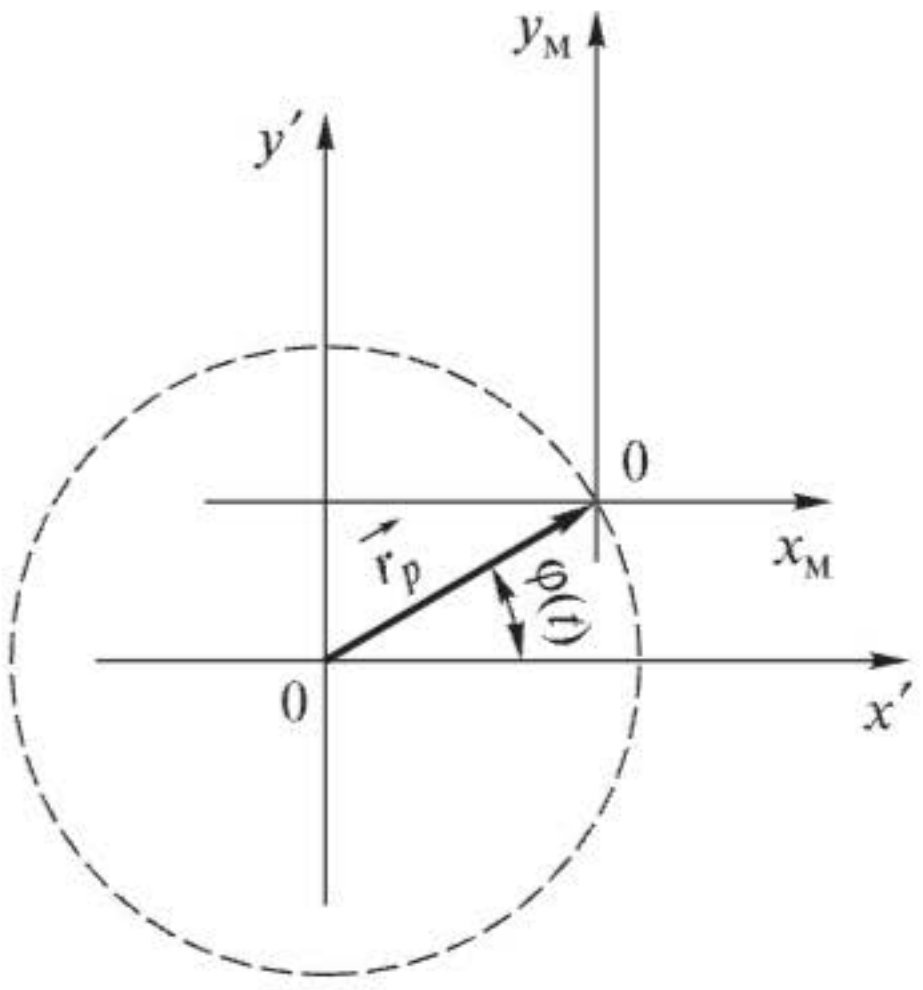


Рис. 7.16. Круговое сканирование МАИ

соответственно, в виде $\varphi_p(t) = \frac{2\pi}{T_0}t$ и $\varphi(t) = \frac{2\pi}{T_0}t$. Поэтому в обоих случаях корреляционная функция случайного потока излучения на выходе МАИ является периодической и может быть представлена следующим образом:

$$Kr_{\Phi t}(t_1, t_2) = Kr_{\Phi t}(t_1 + mT_0, t_2 + nT_0),$$

где $m, n = \pm 1, \pm 2, ...,$ T_0 — период движения МАИ.

Для исключения нестационарности можно выполнить усреднение в пределах периода T_0 движения МАИ. Тогда периодическая корреляционная функция нестационарного случайного процесса преобразуется к виду

$$Kr_{\Phi t}(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} Kr_{\Phi t}(t, t+\tau)dt. \qquad (7.103)$$

Для апериодического движения МАИ корреляционная функция нестационарного случайного процесса преобразуется к стационарному виду в соответствии с выражением

$$Kr_{\Phi t}(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{T} Kr_{\Phi t}(t, t+\tau)dt, \qquad (7.104)$$

где T — интервал регистрации реализаций сигнала.

Такое описание можно использовать и в том случае, когда в тракте ОЭП после МАИ содержатся звенья, у которых инерционность превышает значение периода T_0 сканирования. Как правило, для ОЭП обнаружения такое условие выполняется.

Частотно-временной спектр случайного потока на выходе МАИ имеет вид

$$\tilde{Kr}_{\Phi t}(\nu_t) = F_\tau\{Kr_{\Phi t}(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} Kr_{\Phi t}(\tau)\exp(-i\cdot 2\pi\nu_t\tau)d\tau. \qquad (7.105)$$

В частности, для **периодического движения МАИ** ЧВС случайного потока

$$\tilde{Kr}_{\Phi t}(\nu_t) = F_\tau\{Kr_{\Phi t}(\tau)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Kr_{\Phi t_k}\delta\left(\nu_t - \frac{k}{T_0}\right). \qquad (7.106)$$

Здесь корреляционная функция описывается рядом Фурье

$$Kr_{\Phi t}(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Kr_{\Phi t_k} \exp\left(i \cdot 2\pi \frac{k}{T_0} \tau \right), \qquad (7.107)$$

в котором коэффициенты ряда определяются выражением

$$Kr_{\Phi t_k} = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} Kr_{\Phi t}(\tau) \exp\left(-i \cdot 2\pi \frac{k}{T_0} \tau \right) d\tau. \qquad (7.108)$$

Частотный метод определения корреляционной функции временного потока излучения и частотно-временного спектра на выходе подвижного МАИ

Если известен ПЧС $\tilde{K}r_{\Phi}\left(\nu_x, \nu_y, \gamma_p(t, t+\tau)\right)$ на выходе неподвижного МАИ, то корреляционная функция $Kr_{\Phi t}(t, t+\tau)$ может быть определена путем вычисления обратного преобразования Фурье. В общем случае это можно представить в виде

$$Kr_{\Phi t}(t, t+\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{K}r_{\Phi}\left(\nu_x, \nu_y, \gamma_p(t, t+\tau)\right) \times$$

$$\times \exp\left\{ i \cdot 2\pi \left[\nu_x \xi_p(t, t+\tau) + \nu_y \eta_p(t, t+\tau) \right] \right\} d\nu_x d\nu_y. \qquad (7.109)$$

Для **периодического движения МАИ** с учетом формул (7.103) и (7.109) выражение для коэффициентов ряда (k-х гармоник корреляционной функции) имеет вид

$$Kr_{\Phi t_k} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{K}r_E\left(\nu_x, \nu_y\right) \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{T_0^2} \int_0^{T_0} \int_0^{T_0} \tilde{H}^{\text{МАИ}}\left(\nu_x, \nu_y, \varphi_p(t)\right) \tilde{H}^{\text{МАИ}}\left(-\nu_x, -\nu_y, \varphi_p(t+\tau)\right) \times \right.$$

$$\left. \times \exp\left\{ i \cdot 2\pi \left[\nu_x \xi_p(t, t+\tau) + \nu_y \eta_p(t, t+\tau) \right] \right\} dt d\tau \right\} d\nu_x d\nu_y. \qquad (7.110)$$

Проведя аналогичные преобразования для МАИ, осуществляющих **апериодическое движение**, для ЧВС случайного потока на выходе МАИ получим следующую зависимость:

$$\tilde{K}r_{\Phi t}(\nu_t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{K}r_E(\nu_x, \nu_y)\times$$

$$\times\left\{\lim_{T_0\to\infty}\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}\int_0^{T_0} \tilde{H}^{\text{МАИ}}\left(\nu_x, \nu_y, \varphi_p(t)\right)\tilde{H}^{\text{МАИ}}\left(-\nu_x, -\nu_y, \varphi_p(t+\tau)\right)\times\right.$$

$$\left.\times\exp\left\{i\cdot 2\pi\left[\nu_x\xi_p(t, t+\tau)+\nu_y\eta_p(t, t+\tau)\right]\right\}dtd\tau\right\}d\nu_x d\nu_y. \qquad (7.111)$$

Определим ЧВС случайного потока на выходе МАИ при **линейном сканировании** (см. рис. 7.14). Как отмечалось выше, закон движения определяется системой параметрических уравнений $x_p = x_p(t) = V_x t;\ y_p = 0;\ \varphi_p = 0$. При этом разность значений координат для моментов времени t и $t+\tau$ определяется следующими выражениями:

$$\xi_p(t, t+\tau) = x_p(t+\tau) - x_p(t) = V_x(t+\tau) - V_x t = V_x\tau = \xi_p(\tau);$$

$$\eta_p(t, t+\tau) = y_p(t+\tau) - y_p(t) = 0;$$

$$\gamma_p(t, t+\tau) = \gamma_p(t+\tau) - \gamma_p(t) = 0.$$

Таким образом, при линейном сканировании случайный поток на выходе МАИ представляет собой стационарный процесс. В соответствии с выражением (7.109) корреляционная функция в этом случае имеет вид

$$Kr_{\Phi t}(t, t+\tau) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{K}r_{\Phi}(\nu_x, \nu_y)\exp\left\{i\cdot 2\pi\left[\nu_x\xi_p(t, t+\tau)\right]\right\}d\nu_x d\nu_y =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{K}r_{\Phi}(\nu_x, \nu_y)\exp\left(i\cdot 2\pi\nu_x V_x\tau\right)d\nu_x d\nu_y =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{K}r_E(\nu_x, \nu_y)\left|\tilde{H}^{\text{маи}}(\nu_x, \nu_y)\right|^2\exp\left(i\cdot 2\pi\nu_x V_x\tau\right)d\nu_x d\nu_y =$$

$$= Kr_{\Phi t}(\tau), \qquad (7.112)$$

где

$$\tilde{K}r_E(\nu_x,\nu_y)=\left(\pi\tau\beta\sin^2\sigma'_{A'}\right)^2\tilde{K}r_L(\beta\nu_x,\beta\nu_y)\left|\tilde{H}_N^{\text{ОС}}(\nu_x,\nu_y)\right|^2. \quad (7.113)$$

Найдем теперь ЧВС случайного потока на выходе МАИ **при линейном сканировании**. Для этого вычислим преобразование Фурье от выражения (7.113):

$$\tilde{K}r_{\Phi t}(\nu_t)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{K}r_E(\nu_x,\nu_y)\left|\tilde{H}^{\text{МАИ}}(\nu_x,\nu_y)\right|^2\times$$

$$\times\exp(i\cdot 2\pi\nu_x V_x\tau)\exp(-i\cdot 2\pi\nu_t\tau)d\nu_x d\nu_y d\tau=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{K}r_E(\nu_x,\nu_y)\left|\tilde{H}^{\text{МАИ}}(\nu_x,\nu_y)\right|^2 d\nu_x d\nu_y\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[i\cdot 2\pi(\nu_x V_x-\nu_t)\tau\right]d\tau. \quad (7.114)$$

Воспользовавшись интегральным представлением δ-функции и теоремой подобия (масштабов), внутренний интеграл можно представить соотношением

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[i\cdot 2\pi(\nu_x V_x-\nu_t)\tau\right]d\tau=\delta(\nu_x V_x-\nu_t)=$$

$$=\delta\left[V_x\left(\nu_x-\frac{\nu_t}{V_x}\right)\right]=\frac{1}{V_x}\delta\left(\nu_x-\frac{\nu_t}{V_x}\right).$$

Тогда выражение (7.114) преобразуется к виду

$$\tilde{K}r_{\Phi t}(\nu_t)=$$

$$=\frac{1}{V_x}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{K}r_E(\nu_x,\nu_y)\left|\tilde{H}^{\text{МАИ}}(\nu_x,\nu_y)\right|^2\delta\left(\nu_x-\frac{\nu_t}{V_x}\right)d\nu_x d\nu_y=$$

$$=\frac{1}{V_x}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{K}r_E\left(\frac{\nu_t}{V_x},\nu_y\right)\left|\tilde{H}^{\text{МАИ}}\left(\frac{\nu_t}{V_x},\nu_y\right)\right|^2 d\nu_y. \quad (7.115)$$

Подставив в (7.115) выражение для спектральной плотности облученности $\tilde{K}r_E(\nu_x,\nu_y)$, получим формулу для ЧВС случайного потока на выходе МАИ при линейном сканировании:

$$\tilde{K}r_{\Phi t}(\nu_t) = \frac{\left(\pi\tau\beta\sin^2\sigma'_{A'}\right)^2}{V_x}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{K}r_L\left(\frac{\beta\nu_t}{V_x},\beta\nu_y\right)\left|\tilde{H}_N^{\text{ОС}}\left(\frac{\nu_t}{V_x},\nu_y\right)\right|^2\left|\tilde{H}^{\text{МАИ}}\left(\frac{\nu_t}{V_x},\nu_y\right)\right|^2 d\nu_y. \qquad (7.116)$$

Дисперсия случайного потока на выходе МАИ при линейном сканировании

$$D_\Phi = \int_{-\infty}^{\infty}\tilde{K}r_\Phi(\nu_t)d\nu_t. \qquad (7.117)$$

Если требуется определить корреляционную функцию по известной спектральной плотности $\tilde{K}r_{\Phi t}(\nu_t)$ случайного потока на выходе МАИ при линейном сканировании, то следует вычислить обратное преобразование Фурье от выражения (7.116), тогда

$$Kr_{\Phi t}(\tau) = \frac{\left(\pi\tau\beta\sin^2\sigma'_A\right)^2}{V_x}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{K}r_L\left(\frac{\beta\nu_t}{V_x},\beta\nu_y\right)\left|\tilde{H}_N^{\text{ОС}}\left(\frac{\nu_t}{V_x},\nu_y\right)\right|^2\times$$

$$\times\left|\tilde{H}^{\text{МАИ}}\left(\frac{\nu_t}{V_x},\nu_y\right)\right|^2\exp(i\cdot 2\pi\nu_t\tau)d\nu_y d\nu_t. \qquad (7.118)$$

Полученные в разделах 7.2 и 7.3 выражения можно использовать при решении задачи селекции объектов на пространственно-неравномерном случайном фоне.

7.4. Размерности физических величин

При выполнении расчетов необходимо следить за соблюдением размерностей физических величин, используемых для описания сигналов. В связи с этим рассмотрим размерности физических величин при оперировании с детерминированными и случайными сигналами.

Размерности детерминированных сигналов при квазимонохроматическом излучении

1. *Описание сигналов в линейных координатах:*

- пространственное распределение облученности $E_\lambda(x', y')$ — Вт/м^2;
- ПЧС спектрального пространственного распределения облученности $\tilde{E}_\lambda(\nu_x, \nu_y)$ — Вт;
- пространственное распределение потока излучения на выходе МАИ $\Phi_\lambda(x_p, y_p)$ — Вт;
- ПЧС потока излучения на выходе МАИ $\tilde{\Phi}_\lambda(\nu_x, \nu_y)$ — Вт · м^2;
- временной поток излучения на выходе МАИ $\Phi_\lambda(t)$ — Вт;
- ЧВС потока излучения на выходе МАИ $\tilde{\Phi}_\lambda(\nu_t)$ — Вт · с;
- функция пропускания МАИ $H_\tau^{\text{МАИ}}(x_\text{м}, y_\text{м})$ — отн. ед.;
- фурье-образ функции пропускания МАИ $\tilde{H}^{\text{МАИ}}(\nu_x, \nu_y)$ — м^2;
- пространственные частоты ν_x и ν_y — м$^{-1}$;
- временна́я частота ν_t — 1/с;

2. *Описание сигналов в угловых координатах:*

- пространственное распределение облученности $E_\lambda(\theta_x, \theta_y)$ — Вт/рад^2;
- ПЧС пространственного распределения облученности $\tilde{E}_\lambda(\nu_{\theta x}, \nu_{\theta y})$ — Вт;
- пространственное распределение потока излучения на выходе МАИ $\Phi_\lambda(\theta_{px}, \theta_{py})$ — Вт;
- ПЧС потока излучения на выходе МАИ $\tilde{\Phi}_\lambda(\nu_{\theta x}, \nu_{\theta y})$ — Вт · рад^2;
- временно́й поток излучения на выходе МАИ $\Phi_\lambda(t)$ — Вт;
- частотно-временной спектр потока излучения на выходе МАИ $\tilde{\Phi}_\lambda(\nu_t)$ — Вт · с;
- функция пропускания МАИ $H_\tau^{\text{МАИ}}(\theta_{\text{м}x}, \theta_{\text{м}y})$ — отн. ед.;
- фурье-образ функции пропускания МАИ $\tilde{H}^{\text{МАИ}}(\nu_{\theta x}, \nu_{\theta y})$ — рад^2;
- пространственные частоты $\nu_{\theta x}$ и $\nu_{\theta y}$ — рад$^{-1}$;

Размерности случайных сигналов при квазимонохроматическом излучении

1. *Описание случайных сигналов в линейных координатах:*

• реализация случайного пространственного распределения облученности $E_{\lambda}^{\text{сл}}(x', y')$ — Вт/м^2;

• математическое ожидание случайного пространственного распределения облученности $m_{\lambda E}$ — Вт/м^2;

• реализация случайного пространственного распределения потока излучения на выходе МАИ $\Phi_{\lambda}^{\text{сл}}(x_p, y_p)$ — Вт;

• корреляционная функция случайного пространственного распределения облученности $Kr_E(\xi', \eta') - (\text{Вт/м}^2)^2$;

• ПЧС (спектральная плотность) случайного пространственного распределения облученности $\tilde{K}r_E(\nu_x, \nu_y) - (\text{Вт} \cdot \text{м/м}^2)^2$;

• корреляционная функция случайного пространственного распределения потока на выходе МАИ $Kr_{\Phi}(\xi_p, \eta_p)$ — Вт^2;

• ПЧС (спектральная плотность) случайного пространственного потока на выходе МАИ $\tilde{K}r_{\Phi}(\nu_x, \nu_y) - (\text{Вт} \cdot \text{м})^2$;

• корреляционная функция временно́го случайного потока на выходе МАИ $Kr_{\Phi t}(\tau)$ — Вт^2;

• ЧВС (спектральная плотность) временно́го случайного потока на выходе МАИ $\tilde{K}r_{\Phi t}(\nu_t)$ — Вт · с;

• дисперсия временно́го случайного потока на выходе МАИ $Kr_{\Phi t}(\tau)$ — Вт^2.

2. *Описание случайных сигналов в угловых координатах:*

• реализация случайного пространственного распределения облученности $E_{\lambda}^{\text{сл}}(\theta'_x, \theta'_y)$ — Вт/рад^2;

• реализация случайного пространственного распределения потока излучения на выходе МАИ $\Phi_{\lambda}^{\text{сл}}(\theta_{px}, \theta_{py})$ — Вт;

• корреляционная функция случайного пространственного распределения облученности $Kr_E(\mu'_x, \mu'_y) - (\text{Вт/рад}^2)^2$;

• ПЧС (спектральная плотность) случайного пространственного распределения облученности

$\tilde{K}r_E(\nu_{\theta x}, \nu_{\theta y}) - (\text{Вт} \cdot \text{рад/рад}^2)^2 = (\text{Вт/рад})^2$;

• корреляционная функция случайного пространственного распределения потока на выходе МАИ $Kr_{\Phi}(\mu_{px}, \mu_{py})$ — Вт^2;

• ПЧС (спектральная плотность) случайного пространственного потока на выходе МАИ $\tilde{K}r_{\Phi}(\nu_{\theta x}, \nu_{\theta y})$ — (Вт · рад)^2;

• корреляционная функция временно́го случайного потока на выходе МАИ $Kr_{\Phi t}(\tau)$ — Вт^2;

• ЧВС (спектральная плотность) временно́го случайного потока на выходе МАИ $\tilde{K}r_{\Phi t}(\nu_t)$ — Вт^2 · с;

• дисперсия временно́го случайного потока на выходе МАИ $Kr_{\Phi t}(\tau)$ — Вт^2.

8. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ОПТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ ПРИЕМНИКАМИ ИЗЛУЧЕНИЯ

8.1. Общие сведения о приемниках излучения

8.1.1. Назначение приемников излучения

Приемники излучения (ПИ) являются неотъемлемой частью ОЭП, основной функцией которых является преобразование потока оптического излучения, попадающего на фоточувствительный элемент ПИ, в электрический сигнал. При наличии МАИ в составе ОЭП ПИ располагают таким образом, чтобы поток излучения после транспаранта МАИ попадал на чувствительную площадку. Для того чтобы обеспечить попадание всего потока на площадку ПИ, используют оптические элементы, осуществляющие оптическое сопряжение выходного зрачка ОС с площадкой (рис. 8.1).

Кроме того, ПИ могут располагаться в плоскости изображения, формируемого объективом, и тогда фоточувствительные элементы выполняют функции транспаранта МАИ (рис. 8.2) как пространственного фильтра.

В современных ОЭП используются как одноэлементные, так и многоэлементные ПИ, которые могут быть выполнены в виде упорядоченного набора фоточувствительных элементов, расположенных в линию — линейные ПИ, или с матричным расположением — матричные ПИ (МПИ). Одноэлементные ПИ, как

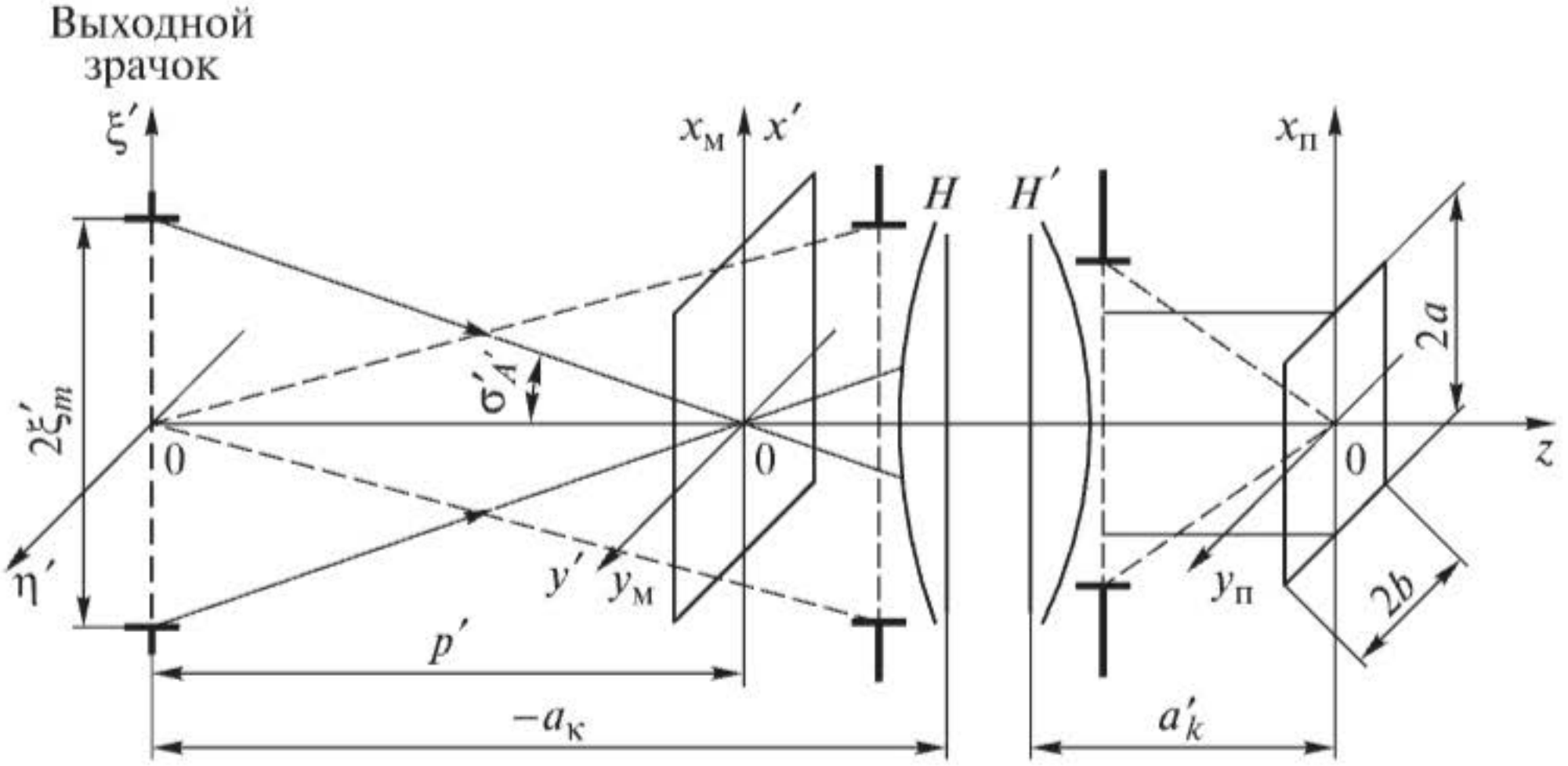


Рис. 8.1. Схема ОЭП с расположением ПИ после МАИ

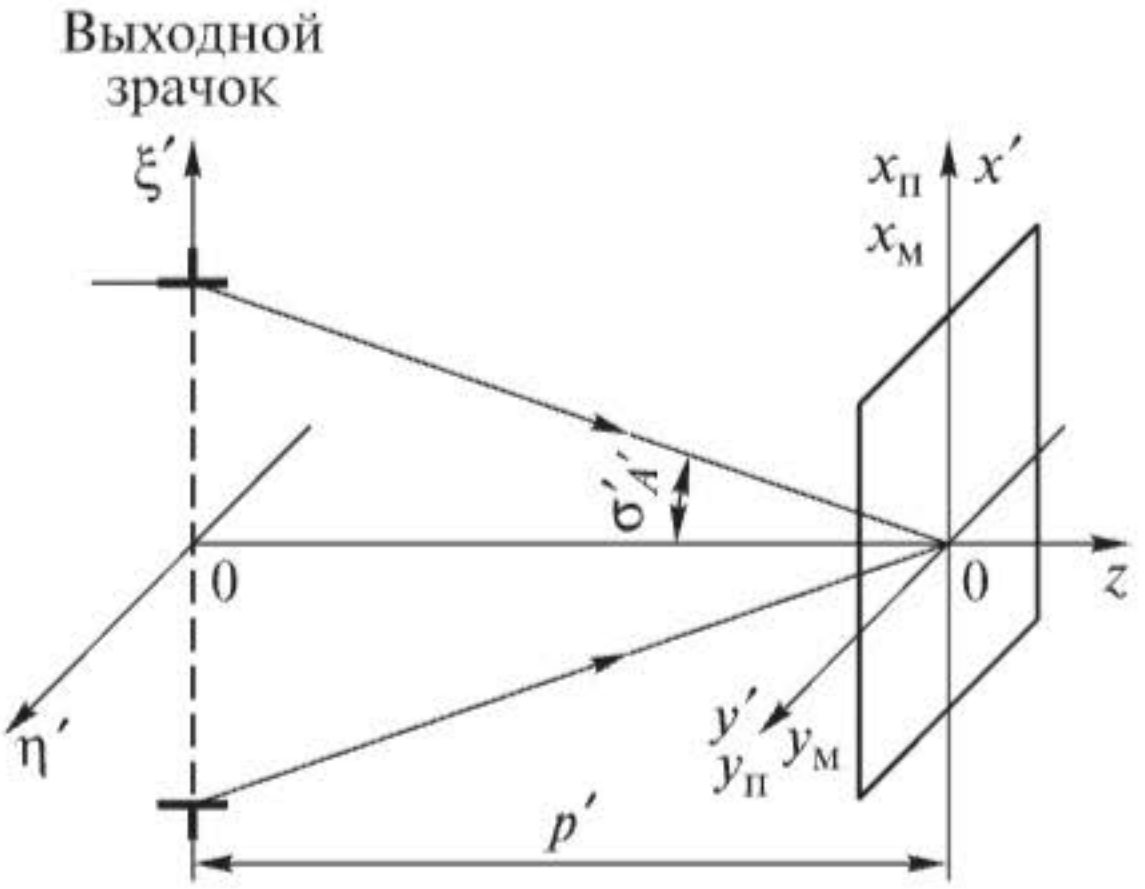


Рис. 8.2. Схема ОЭП с расположением ПИ в плоскости изображения

правило, работают в режиме регистрации мгновенного значения оптического сигнала. Многоэлементные ПИ могут работать как в режиме регистрации мгновенного значения оптического сигнала, так и в режиме временного накопления сигнала, что необходимо учитывать при модельном описании ПИ.

Как комплектующие элементы ОЭП ПИ представляют собой сложные устройства, которые, кроме фоточувствительных элементов, включают в свой состав микрохолодильники, а также достаточно сложные аналоговые и цифровые электронные устройства, осуществляющие обработку электрических сигналов. Такие

ПИ называются фотоприемными устройствами (ФПУ). В соответствии с конкретным конструктивным обликом будем рассматривать модельное математическое описание ПИ или ФПУ как элементов, выполняющих только функцию преобразования оптического сигнала в электрический сигнал.

8.1.2. Математическая модель одноэлементного приемника излучения

Перед тем как перейти к модельному описанию ПИ, обсудим характеристики и параметры, которые численно характеризуют процесс преобразования оптического сигнала.

Одной из основных характеристик ПИ является энергетическая характеристика $U^{\text{п}}(\Phi)$, определяющая зависимость сигнала на выходе ПИ $U^{\text{п}}$ от интегрального потока Φ излучения, попадающего на фоточувствительный элемент. Вид типичной энергетической характеристики представлен на рис. 8.3.

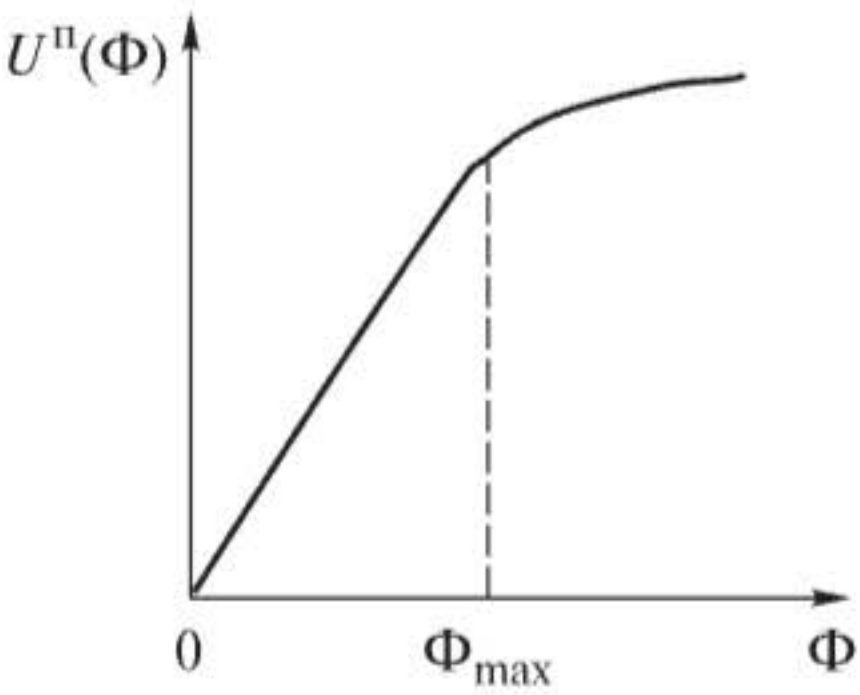


Рис. 8.3. Типовая энергетическая характеристика ПИ

Как видно на рис. 8.3, в общем случае ПИ является нелинейным элементом. Эффективность преобразования потока излучения в электрический сигнал оценивается интегральной чувствительностью

$$S(\Phi) = \frac{dU^{\text{п}}(\Phi)}{d\Phi}. \qquad (8.1)$$

Как известно, чувствительность ПИ также зависит от спектрального состава оптического излучения, размеров фоточувствительной площадки, скорости изменения значения потока или временно́й частоты модуляции потока излучения. Кроме того, чувствительность в пределах фоточувствительной площадки ПИ, как правило, неодинакова. Таким образом, чувствительность ПИ является сложной функцией многих переменных, а именно $S[\lambda, \Phi(\lambda), x_{\text{п}}, y_{\text{п}}, t]$. Но при выполнении расчетов использовать такую характеристику крайне неудобно, поэтому при модельном описании ПИ принимают ряд допущений.

1. В области относительно малых потоков излучения до значений $\Phi_{max} \le 100\Phi_{пор}$ ($\Phi_{пор}$ — пороговый поток, вызывающий сигнал на выходе ПИ, равный СКО шума) энергетическая характеристика имеет линейный вид. При таком условии можно принять допущение о линейности ПИ и представить интегральную чувствительность в виде

$$S_{и} \approx \frac{U^{п}(\Phi)}{\Phi}, \tag{8.2}$$

где $\Phi \le \Phi_{max}$.

2. Все приведенные выше факторы, влияющие на чувствительность ПИ, являются независимыми.

3. Распределение чувствительности по фоточувствительному элементу ПИ равномерное и учитываются только его размеры и форма.

4. Приемник излучения является линейным звеном, инерционные свойства которого характеризуются импульсным откликом или передаточной функцией звена апериодического типа.

При таких допущениях чувствительность ПИ можно представить функцией с разделяющимися переменными:

$$S[\lambda, \Phi(\lambda), x_{п}, y_{п}, t] \approx S(\lambda) S_{А\,отн}(x_{п}, y_{п}) H_{t}^{п}(t), \tag{8.3}$$

где $S(\lambda) = S_{\lambda M} s_{отн}(\lambda)$ — функция, описывающая спектральную чувствительность ПИ, $S_{\lambda M}$ — максимальное значение спектральной чувствительности, $s_{отн}(\lambda)$ — относительная спектральная чувствительность; $S_{A\,отн}(x_{п}, y_{п})$ — функция, описывающая размеры и форму фоточувствительной площадки ПИ в относительных единицах; $H_{t}^{п}(t)$ — временно́й импульсный отклик ПИ как апериодического звена.

Импульсный отклик ПИ как апериодического звена описывается функцией

$$H_{t}^{п}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\tau_{п}} \exp\left(\dfrac{t}{\tau_{п}}\right), & t \ge 0; \\ 0, & t < 0, \end{cases} \tag{8.4}$$

где $\tau_{п}$ — постоянная времени, характеризующая инерционность ПИ.

Соответствующая передаточная функция ПИ имеет вид

$$\tilde{H}_t^{\text{п}}(\nu_t) = \frac{1}{1 + i \cdot 2\pi\nu_t\tau_{\text{п}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi\nu_t\tau_{\text{п}})^2}} \exp\left[-i \operatorname{arctg}(2\pi\nu_t\tau_{\text{п}})\right]. \quad (8.5)$$

Тогда интегральная чувствительность ПИ выражается через спектральную чувствительность для заданного эталонного источника излучения:

$$S_{\text{и}} = S_{\lambda M} \frac{\int_0^\infty \Phi_{\lambda\text{эт}}(\lambda) s_{\text{отн}}(\lambda) d\lambda}{\int_0^\infty \Phi_{\lambda\text{эт}}(\lambda) d\lambda} = S_{\lambda M} k_{\text{исп}}. \quad (8.6)$$

Преобразование оптического сигнала в электрический в ПИ как с внешним, так и внутренним фотоэффектом обусловлено случайными процессами генерации электрических сигналов при воздействии электромагнитного излучения. Вследствие этого кроме полезного сигнала на выходе ПИ присутствует помеха — шум ПИ. Эту помеху обычно рассматривают как аддитивную, являющуюся нормальным стационарным случайным процессом. Количественно она характеризуется математическим ожиданием $m_{\text{ш}}^{\text{п}}$, дисперсией $D_{\text{ш}}^{\text{п}} = \sigma_{\text{ш}}^2$, корреляционной функцией $Kr_{\text{ш}}^{\text{п}}(\tau)$ или спектральной плотностью $\tilde{K}r_{\text{ш}}^{\text{п}}(\nu_t)$ (ЧВС). Связь между дисперсией и спектральной плотностью помехи определяется выражением

$$D_{\text{ш}}^{\text{п}} = \sigma_{\text{ш}}^2 = \int_{\Delta\nu_t} \tilde{K}r_{\text{ш}}^{\text{п}}(\nu_t) d\nu_t, \quad (8.7)$$

где $\Delta\nu_t$ — полоса пропускания электронного тракта ОЭП.

На рис. 8.4 представлена структурная схема линейной модели ПИ, в которой учитываются принятые допущения и ограничения при описании преобразования оптического сигнала.

На схеме (см. рис. 8.4) приняты следующие обозначения:

ПФ — пространственный фильтр, который характеризуется нормированной функцией $S_{A\,\text{отн}}(x_{\text{п}}, y_{\text{п}})$, описывающей размеры и форму фоточувствительной площадки ПИ;

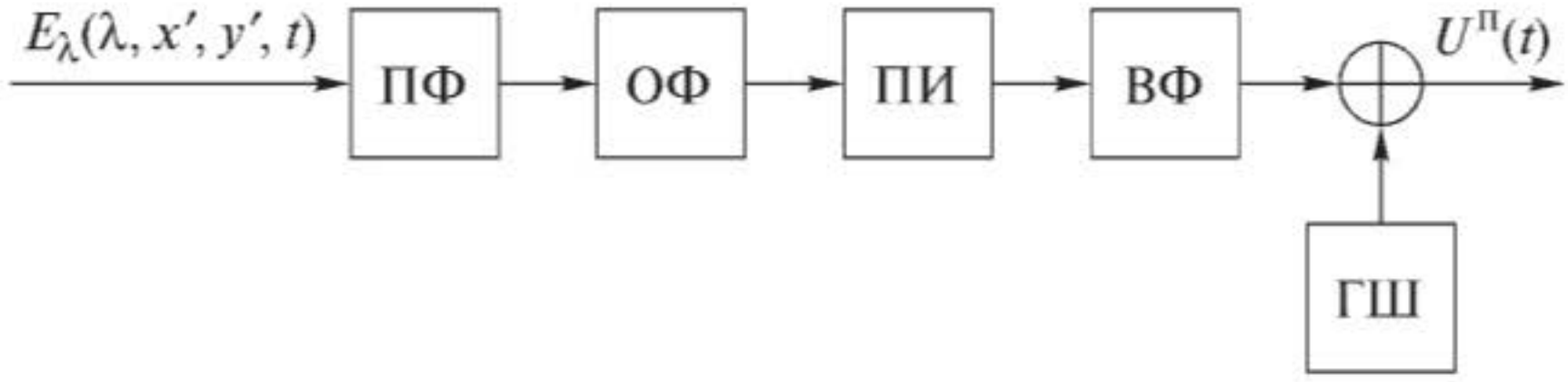


Рис. 8.4. Структурная схема линейной модели одноэлементного ПИ

ОФ — оптический фильтр, который характеризуется относительной спектральной чувствительностью $s_{\text{отн}}(\lambda)$;

ПИ — идеальный ПИ, безынерционное звено, которое характеризуется параметром $S_{\lambda M}$;

ВФ — временно́й фильтр с импульсным откликом $H_t^{\text{п}}(t)$ или передаточной функцией $\tilde{H}_t^{\text{п}}(\nu_t)$;

ГШ — генератор реализаций шума ПИ, спектральная плотность которых описывается функцией $\tilde{K}r_{\text{ш}}^{\text{п}}(\nu_t)$.

Если предположить, что фоточувствительная площадка ПИ прямоугольной формы, то функция, описывающая размеры и форму фоточувствительной площадки ПИ, имеет вид

$$S_{A\,\text{отн}}(x_{\text{п}}, y_{\text{п}}) = \text{rect}\left(\frac{x_{\text{п}}}{a_x}, \frac{y_{\text{п}}}{a_y}\right),$$

а ее фурье-образ

$$\tilde{S}_{A\,\text{отн}}(\nu_x, \nu_y) = a_x a_y \,\text{sinc}(\pi a_x \nu_x)\,\text{sinc}(\pi a_y \nu_y).$$

8.2. Преобразование одноэлементным приемником излучения сигналов на выходе подвижного модулятора анализатора изображения

8.2.1. Преобразование одноэлементным приемником излучения детерминированных сигналов

После подвижного МАИ на чувствительный элемент ПИ поступает сигнал в виде спектрального потока излучения $\Phi_\lambda(\lambda, t)$, который является функцией длины волны и времени. Ранее было

получено выражение (7.20) для квазимонохроматического потока $\Phi_\lambda(t)$ на выходе подвижного МАИ, который выражается через спектральный поток соотношением $\Phi_\lambda(t) = \Phi_\lambda(\lambda, t)\Delta\lambda$. При описании преобразования оптического сигнала одноэлементным ПИ необходимо учесть, что он реагирует на интегральный поток излучения в соответствии с его спектральной характеристикой, которая описывается функцией $s_{\text{отн}}(\lambda)$. Поэтому для решения поставленной задачи с учетом выражения (7.20) запишем для спектрального потока на выходе подвижного МАИ

$$\Phi_\lambda(\lambda, t) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E_\lambda(\lambda, x', y') H_\tau^{\text{МАИ}}\left[x' - x_p(t), y' - y_p(t), \varphi_p(t)\right] dx'dy', \quad (8.8)$$

где $E_\lambda(\lambda, x', y', t)$ функция, описывающая спектральное распределение облученности в плоскости транспаранта МАИ. Данная функция с учетом формулы (6.127) может быть представлена в виде

$$E_\lambda(\lambda, x', y') =$$

$$= \pi\tau_{\text{ОС}}(\lambda)\tau_{\text{а}}(\lambda)\sin^2\sigma'_{A'} L_\lambda\left(\lambda, \frac{x'}{\beta}, \frac{y'}{\beta}\right) \otimes H_N^{\text{РОС}}(x', y'; \lambda) \quad . \quad (8.9)$$

Примем допущение о том, что функцию пространственного распределения спектральной яркости в пространстве предметов можно представить функцией с разделяющимися переменными

$$L_\lambda(\lambda, x, y) = L_{\lambda M} L_{\lambda\text{отн}}(\lambda) L_{\text{отн}}(x, y\ ), \quad (8.10)$$

где $L_{\lambda M}$ — максимальное значение спектральной яркости; $L_{\lambda\text{отн}}(\lambda)$ — относительная спектральная яркость; $L_{\text{отн}}(x, y\ )$ — относительное пространственное распределение яркости.

Такое допущение не вносит существенных погрешностей для случаев тепловых источников, когда при относительно малых температурных перепадах поверхности объектов относительно фона преобладающим излучением объекта является его собственное излучение, или для случая малоразмерных объектов.

Выведем математические выражения для расчета частотным методом ЧВС детерминированных сигналов на выходе ПИ при различных законах движения МАИ.

Частотно-временной спектр сигнала на выходе приемника излучения при линейном сканировании модулятором анализатора изображения

При линейном сканировании МАИ, когда весь поток попадает на фоточувствительную площадку ПИ, для принятой линейной модели одноэлементного ПИ выходной электрический сигнал описывается выражением

$$\tilde{U}^{\text{п}}(\nu_t) = S_{\lambda M}\tilde{H}_t^{\text{п}}(\nu_t)\int_0^{\infty}\tilde{\Phi}_{\lambda}(\lambda,\nu_t)s_{\text{отн}}(\lambda)d\lambda, \qquad (8.11)$$

где $\tilde{\Phi}_{\lambda}(\lambda,\nu_t)$ — ЧВС спектрального потока на выходе МАИ.

С учетом выражений (7.37) и (8.10) ЧВС спектрального потока на выходе МАИ имеет вид

$$\tilde{\Phi}_{\lambda}(\lambda,\nu_t) = \frac{\pi\sin^2\sigma_A\tau(\lambda)L_{\lambda M}L_{\lambda\text{отн}}(\lambda)}{V_x}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{L}_{\text{отн}}\left(\beta\frac{\nu_t}{V_x},\beta\nu_y\right)\tilde{H}_N^{\text{ОС}}\left(\frac{\nu_t}{V_x},\nu_y;\lambda\right)\tilde{H}^{*\text{МАИ}}\left(\frac{\nu_t}{V_x},\nu_y\right)d\nu_y, \qquad (8.12)$$

где $\tau(\lambda)=\tau_{\text{а}}(\lambda)\tau_{\text{ОС}}(\lambda)\tau_{\text{МАИ}}(\lambda)$ — результирующий коэффициент пропускания, учитывающий ослабление излучения атмосферой, ОС и транспарантом МАИ.

Подставив формулу (8.12) в выражение (8.11), получим

$$\tilde{U}^{\text{п}}(\nu_t) = \frac{\pi\sin^2\sigma_A L_{\lambda M}S_{\lambda M}}{V_x}\tilde{H}_t^{\text{п}}(\nu_t)\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{L}_{\text{отн}}\left(\beta\frac{\nu_t}{V_x},\beta\nu_y\right)\tilde{H}^{*\text{МАИ}}\left(\frac{\nu_t}{V_x},\nu_y\right)d\nu_y\times$$

$$\times\int_0^{\infty}\tilde{H}_N^{\text{ОС}}\left(\frac{\nu_t}{V_x},\nu_y;\lambda\right)L_{\lambda\text{отн}}(\lambda)\tau(\lambda)s_{\text{отн}}(\lambda)d\lambda. \qquad (8.13)$$

Применив ко второму интегралу в выражении (8.13) теорему о среднем, получим выражение

$$\int_0^\infty \tilde{H}_N^{\text{ОС}}\left(\frac{\nu_t}{V_x}, \nu_y; \lambda\right) L_{\lambda\text{отн}}(\lambda)\tau(\lambda)s_{\text{отн}}(\lambda)d\lambda =$$

$$= \tilde{H}_{\text{пх}}^{\text{ОС}}\left(\frac{\nu_t}{V_x}, \nu_y\right)\int_0^\infty L_{\lambda\text{отн}}(\lambda)\tau(\lambda)s_{\text{отн}}(\lambda)d\lambda,$$

из которого следует формула для определения полихроматической ОПФ ОС:

$$\tilde{H}_{\text{пх}}^{\text{ОС}}\left(\frac{\nu_t}{V_x}, \nu_y\right) = \frac{\int_0^\infty \tilde{H}_N^{\text{ОС}}\left(\frac{\nu_t}{V_x}, \nu_y; \lambda\right) L_{\lambda\text{отн}}(\lambda)\tau(\lambda)s_{\text{отн}}(\lambda)d\lambda}{\int_0^\infty L_{\lambda\text{отн}}(\lambda)\tau(\lambda)s_{\text{отн}}(\lambda)d\lambda}. \qquad (8.14)$$

Обозначим знаменатель выражения (8.14)

$$\Delta\lambda_{\text{эф}} = \int_0^\infty L_{\lambda\text{отн}}(\lambda)\tau(\lambda)s_{\text{отн}}(\lambda)d\lambda \qquad (8.15)$$

и назовем его эффективным спектральным диапазоном пропускания ОЭП.

С учетом принятых обозначений выражение (8.13) для ЧВС сигнала на выходе ПИ при линейном сканировании МАИ преобразуется к виду

$$\tilde{U}^{\text{п}}(\nu_t) = \frac{\pi \sin^2 \sigma_A L_{\lambda M}\Delta\lambda_{\text{эф}} S_{\lambda M}}{V_x}\tilde{H}_t^{\text{п}}(\nu_t)\times$$

$$\times\int_{-\infty}^\infty \tilde{L}_{\text{отн}}\left(\beta\frac{\nu_t}{V_x}, \beta\nu_y\right)\tilde{H}_{\text{пх}}^{\text{ОС}}\left(\frac{\nu_t}{V_x}, \nu_y\right)\tilde{H}^{*\text{МАИ}}\left(\frac{\nu_t}{V_x}, \nu_y\right)d\nu_y. \qquad (8.16)$$

Частотно-временной спектр сигнала на выходе приемника излучения при периодическом движении модулятора анализатора изображения

В случае периодического движения МАИ, в том числе при круговом сканировании и вращательном движении, ЧВС определяется выражением

$$\tilde{U}^{\text{п}}(\nu_t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_k^{\text{п}} \delta\left(\nu_t - \frac{k}{T_0} t\right), \tag{8.17}$$

где $U_k^{\text{п}}$ — k-я гармоника ЧВС сигнала на выходе ПИ, которая, в свою очередь, равна

$$U_k^{\text{п}} = S_{\lambda M} \tilde{H}_t^{\text{п}}\left(\nu_{t\,k} = \frac{k}{T_0}\right) \int_0^{\infty} \Phi_{\lambda k}(\lambda) s_{\text{отн}}(\lambda) d\lambda. \tag{8.18}$$

Гармоники $\Phi_{\lambda k}(\lambda)$ спектрального потока излучения на выходе МАИ определяются законом периодического движения. Рассмотрим частные случаи такого движения.

Круговое сканирование. С учетом ранее выведенного выражения (7.43) для гармоник квазимонохроматического потока при круговом сканировании k-е гармоники ЧВС сигнала на входе ПИ можно представить в виде

$$\Phi_{\lambda k}(\lambda) = (i)^k \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}_{\lambda}(\lambda; \nu_x, \nu_y) J_k\left(2\pi r_p \sqrt{\nu_x^2 + \nu_y^2}\right) \times$$

$$\times \exp\left[-ik \operatorname{arctg}\left(\frac{\nu_y}{\nu_x}\right)\right] d\nu_x d\nu_y,$$

где

$$\tilde{\Phi}_{\lambda}(\lambda; \nu_x, \nu_y) = \pi \sin^2 \sigma_A \tau(\lambda) L_{\lambda M} L_{\lambda \text{отн}}(\lambda) \times$$

$$\times \tilde{L}_{\text{отн}}(\beta\nu_x, \beta\nu_y) \tilde{H}_N^{\text{ОС}}(\nu_x, \nu_y; \lambda) \tilde{H}^{*\text{МАИ}}(\nu_x, \nu_y). \tag{8.19}$$

Подставив выражения (7.43) и (8.19) в (8.18) и выполнив преобразования, аналогичные произведенным для линейного сканирования, получим следующее выражение:

$$U_k^{\text{п}} = \pi \sin^2 \sigma_A L_{\lambda M} \Delta\lambda_{\text{эф}} S_{\lambda M} \tilde{H}_t^{\text{п}}(\nu_{t\,k})(i)^k \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{L}_{\text{отн}}(\beta\nu_x, \beta\nu_y) \times$$

$$\times \tilde{H}_{\text{пх}}^{\text{ОС}}(\nu_x, \nu_y) \tilde{H}^{*\text{МАИ}}(\nu_x, \nu_y) J_k\left(2\pi r_p \sqrt{{\nu_x}^2 + {\nu_y}^2}\right) \times$$

$$\times \exp\left[-ik \operatorname{arctg}\left(\frac{\nu_y}{\nu_x}\right)\right] d\nu_x d\nu_y. \qquad (8.20)$$

Вращательное движение. С учетом ранее выведенного выражения (7.56) для гармоник квазимонохроматического потока при вращательном движении представим k-е гармоники ЧВС сигнала на выходе ПИ в виде

$$U_k^{\text{п}} = \Delta\lambda_{\text{эф}} S_{\lambda M} \tilde{H}_t^{\text{п}}(\nu_{t\,k}) 2\pi \int_0^{\infty} \tilde{E}_{\lambda k}(\nu_r) \tilde{H}_k^{*\text{МАИ}}(\nu_r) \nu_r d\nu_r, \qquad (8.21)$$

где в соответствии с формулами (7.57) и (7.58)

$$\tilde{E}_{\lambda k}(\nu_r) = \pi \sin^2 \sigma_A L_{\lambda M} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{L}_{\text{отн}}(\beta\nu_r, \theta) \tilde{H}_{\text{п.х}}^{\text{ОС}}(\nu_r, \theta) \exp(-ik\theta) d\theta \right\};$$

$$\tilde{H}_k^{*\text{МАИ}}(\nu_r) = \left[2\pi(-i)^k \int_0^{\infty} H_k^{\text{МАИ}}(r_{\text{м}}) J_k(2\pi\nu_r r_{\text{м}}) r_{\text{м}} dr_{\text{м}} \right]^*.$$

8.2.2. Преобразование одноэлементным приемником излучения случайных сигналов

При описании преобразования одноэлементным ПИ случайных сигналов примем следующие допущения и ограничения:

- случайное поле яркости, регистрируемое в рабочем спектральном диапазоне ОЭП, является однородным и подчиняется нормальному закону;
- весь поток излучения на выходе МАИ попадает на чувствительный элемент ПИ;
- ПИ является линейным.

При принятом допущении об однородности случайного полихроматического поля яркости поле облученности в плоскости пространственно-инвариантной ОС будет также однородным, а поток излучения на выходе МАИ — случайным стационарным

процессом. Так как ПИ является линейным, то описание преобразования можно выполнить в рамках корреляционной теории. Рассмотрим такое описание для различных вариантов сканирования МАИ.

Описание случайного сигнала на выходе приемника излучения при линейном сканировании МАИ. С учетом формулы (7.116) получим следующее выражение для ЧВС случайного сигнала на выходе ПИ при линейном сканировании:

$$\tilde{K}r_{U_{\text{п}}}(\nu_t) = \frac{\left(\pi\beta\sin^2\sigma'_{A'}\Delta\lambda_{\text{эф}}S_{\lambda M}\right)^2}{V_x}\left|\tilde{H}_t^{\text{п}}(\nu_t)\right|^2 \times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{K}r_L\left(\frac{\beta\nu_t}{V_x},\beta\nu_y\right)\left|\tilde{H}_{\text{пх}}^{\text{ОС}}\left(\frac{\nu_t}{V_x},\nu_y\right)\right|^2\left|\tilde{H}^{\text{МАИ}}\left(\frac{\nu_t}{V_x},\nu_y\right)\right|^2 d\nu_y. \qquad (8.22)$$

В выражении (8.22) функция $\tilde{K}r_L\left(\frac{\beta\nu_t}{V_x},\beta\nu_y\right)$ описывает спектральную плотность (ПЧС) полихроматического случайного поля яркости, приведенного по масштабу к плоскости изображения ОС, а $\tilde{H}_{\text{пх}}^{\text{ОС}}\left(\frac{\nu_t}{V_x},\nu_y\right)$ — полихроматическая ОПФ ОС, которая определяется в соответствии с формулой (8.14) для некоторого усредненного спектрального распределения $\bar{L}_{\lambda\text{отн}}(\lambda)$ случайного поля яркости.

Описание случайного сигнала на выходе ПИ при периодическом движении МАИ. Периодическое движение осуществляется при круговом сканировании или вращательном движении МАИ. При этом спектральная плотность (ЧВС) случайного сигнала на выходе ПИ имеет вид

$$\tilde{K}r_{U_{\text{п}}}(\nu_t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}Kr_{U_{\text{п}k}}\delta\left(\nu_t - \frac{k}{T_0}\right), \qquad (8.23)$$

где $Kr_{U_{\text{п}k}}$ — значение k-й гармоники корреляционной функции случайного сигнала на выходе ПИ, которое описывается выражением

$$Kr_{U_{\text{п}k}} = S_{\lambda M}^2\left|\tilde{H}_t^{\text{п}}\left(\nu_{t_k}\right)\right|^2 Kr_{\Phi t_k}. \qquad (8.24)$$

8.3. Преобразование сигналов многоэлементными приемниками излучения

8.3.1. Общие сведения о многоэлементных приемниках излучения и постановка задачи описания преобразования сигналов приемниками излучения

В современных ОЭП для целей преобразования оптических сигналов широко используются многоэлементные ПИ в виде линеек или матриц фоточувствительных элементов. Фоточувствительные площадки многоэлементных ПИ, как правило, расположенные в плоскости изображения ОС, осуществляют преобразование двумерного оптического сигнала, описываемого в терминах облученности, в массив значений электрического сигнала. При этом, как будет показано ниже, фоточувствительные элементы выполняют функции МАИ, заключающиеся в пространственной фильтрации и амплитудно-импульсной модуляции.

Многоэлементные ПИ являются сложными ФПУ, которые могут работать как в режиме регистрации мгновенных значений сигналов, так и в режиме накопления сигналов.

Режим регистрации мгновенных значений сигналов обычно используется для многоэлементных ПИ в виде линеек. В качестве примера на рис. 8.5 представлена схема тепловизора с параллельным сканированием и параллельной обработкой сигналов. В этой схеме изображение, формируемое объективом *1* в инфракрасном диапазоне длин волн излучения, перемещается сканирующим зеркалом *2* относительно чувствительных элементов линейки ПИ *4*. Сигналы, зарегистрированные элементами линейки ПИ, после обработки в многоканальном электронном тракте поступают на соответствующие элементы линейки светодиодов (СД) *3*. При этом яркость свечения элементов линейки СД, излучающих в видимом диапазоне длин волн, будет пропорциональна значениям сигналов от линейки ПИ. Перемещающееся изображение линейки СД, которое формируется при отражении от обратной стороны качающего зеркала, наблюдается человеком в окуляр *5*. Таким образом, при считывании мгновенных значений сигналов осуществляется параллельная обработка зарегистрированных оптических сигналов.

Многоэлементные ПИ в виде матриц чувствительных элементов, называемых матричными ПИ (МПИ), в большинстве случаев работают в режиме накопления сигналов. Сигналы в виде

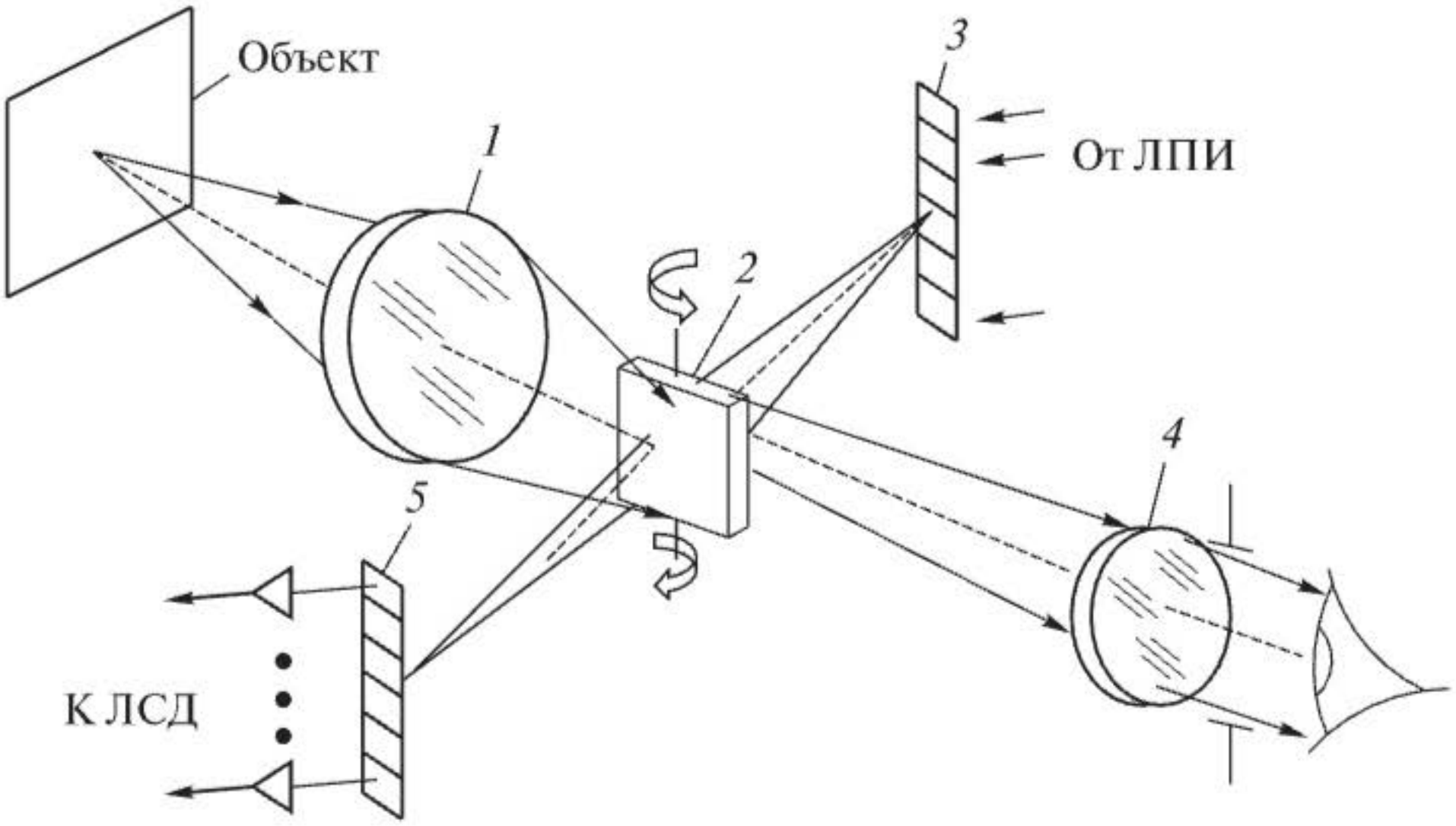


Рис. 8.5. Тепловизор с параллельным сканированием и параллельной разверткой изображения:

ЛПИ — линейка ПИ; ЛСД — линейка СД

электрических зарядов накапливаются в аналоговых запоминающих устройствах, представляющих собой матрицу или линейку параллельно включенных конденсаторов. Для последующей обработки зарегистрированных электрических сигналов в электронном тракте осуществляют так называемое мультиплексирование, заключающееся в последовательном считывании накопленных зарядов для передачи их в одномерный электронный тракт.

Как было показано выше, при параллельной обработке сигналов оптический сигнал непрерывно преобразуется многоэлементным ПИ в набор мгновенных значений электрических сигналов, которые подвергаются обработке и передаче в соответствующих параллельных каналах электронного тракта. В итоге двумерный массив электрических сигналов преобразуется линейкой или матрицей светодиодов в оптический сигнал.

Следует отметить, что мультиплексирование осуществляется в интервалы времени между кадрами, когда над самими сигналами никаких существенных операций кроме считывания и перемещения данных не проводится. Поэтому в дальнейшем пренебрежем возможными линейными искажениями, возникающими при мультиплексировании, и в основном будем рассматривать

вариант параллельной обработки сигналов, зарегистрированных многоэлементными ПИ.

При описании преобразования оптических сигналов многоэлементными ПИ используется практически тот же набор параметров и характеристик, который определен для одноэлементных ПИ. Отличие заключается лишь в том, что для многоэлементных ПИ, работающих в режиме накопления сигналов, вместо постоянной времени $\tau_{\text{п}}$ используется такой параметр, как время накопления сигнала $t_{\text{н}}$. Кроме того, в дополнение к параметрам, определяющим размеры и форму чувствительных элементов, указывают параметры T_x и T_y, которые определяют расстояние между центрами соседних чувствительных элементов, а также число $K \times M$ чувствительных элементов.

Существенным недостатком многоэлементных ПИ является различие характеристик и значений параметров разных чувствительных элементов. Разброс значений чувствительности СКО шума, темновых токов, спектральных характеристик и др. проявляется как дополнительная помеха, называемая геометрическим шумом. При описании преобразования оптических сигналов многоэлементными ПИ примем допущение, что геометрический шум отсутствует.

8.3.2. Описание преобразования оптических сигналов матричным приемником излучения

Будем считать, что в плоскости $x'0y'$ изображения изопланатической ОС, где расположены чувствительные элементы МПИ, распределение спектральной облученности по аналогии с выражением (8.9) описывается функцией вида

$$E_\lambda(\lambda, x', y') =$$

$$= \pi \sin^2 \sigma'_A \cdot \tau_{\text{a}}(\lambda)\tau_{\text{oc}}(\lambda) L_\lambda\left(\lambda, \frac{x'}{\beta}, \frac{y'}{\beta}\right) \otimes H_N^{\text{POC}}(x', y'; \lambda) \quad .$$

Перейдем к описанию входного оптического сигнала в терминах интегральной облученности, которую с учетом спектральной чувствительности $s_{\text{отн}}(\lambda)$ элементов МПИ и принятого ранее допущения (8.10) можно представить выражением

$$E(x', y') = \pi \sin^2 \sigma'_{A'} \Delta\lambda_{\text{эф}} L_{\lambda M} L_{\text{отн}}\left(\frac{x'}{\beta}, \frac{y'}{\beta}\right) \otimes H_{\text{пх}}^{\text{ОС}}(x', y'). \quad (8.25)$$

Здесь $\Delta\lambda_{\text{эф}}$ — эффективный спектральный диапазон пропускания ОЭП, определяемый выражением (8.15); $H_{\text{п.х}}^{\text{ОС}}(x', y')$ — полихроматическая функция рассеяния ОС, которую с учетом выражения (8.14) можно записать в виде

$$H_{\text{пх}}^{\text{ОС}}(x', y') = \frac{\int_0^\infty H_N^{\text{ОС}}(x', y'; \lambda) L_{\lambda\text{отн}}(\lambda) \tau_{\text{а}}(\lambda) \tau_{\text{ОС}}(\lambda) s_{\text{отн}}(\lambda) d\lambda}{\int_0^\infty L_{\lambda\text{отн}}(\lambda) \tau_{\text{а}}(\lambda) \tau_{\text{ОС}}(\lambda) s_{\text{отн}}(\lambda) d\lambda}. \quad (8.26)$$

Матричный приемник излучения представляет собой двумерную матрицу, центры чувствительных элементов которой имеют координаты kT_x, mT_y, причем $k = \overline{0, \pm(K-1)/2}$, $m = \overline{0, \pm(M-1)/2}$. Чувствительные элементы МПИ прямоугольной формы описываются функцией

$$S_{\text{А отн}}(x_{\text{п}}, y_{\text{п}}) = \text{rect}\left(\frac{x_{\text{п}}}{a_x}, \frac{y_{\text{п}}}{a_y}\right).$$

Предположим, что центр фоточувствительного элемента МПИ имеет произвольные координаты x_1, y_1 в плоскости изображения ОС (рис. 8.6).

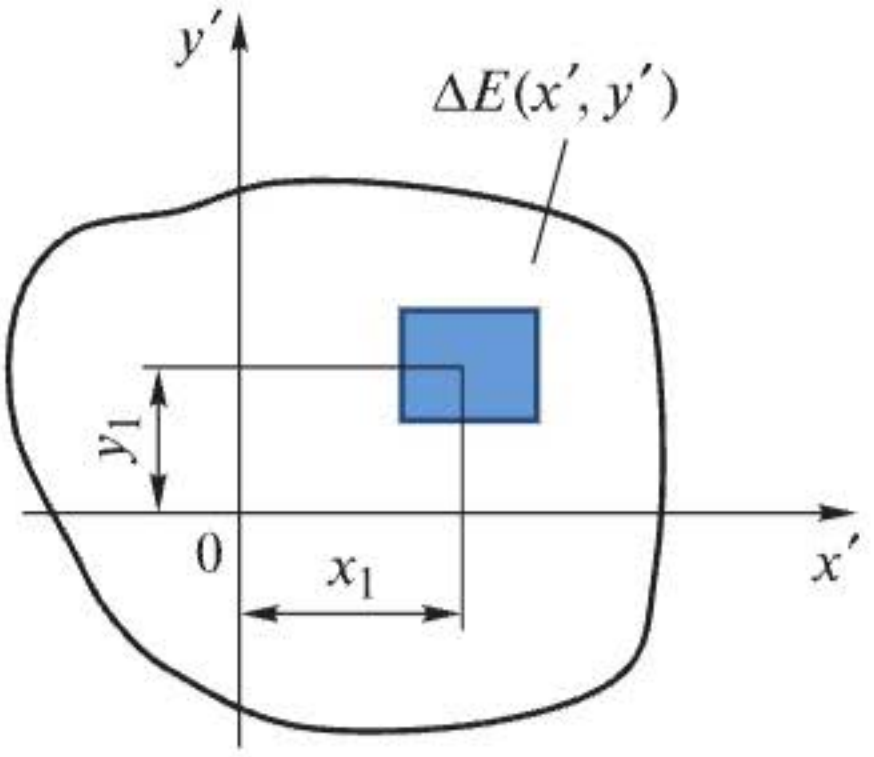


Рис. 8.6. Произвольное положение чувствительного элемента МПИ в плоскости изображения ОС

Тогда функцию, описывающую пространственное распределение чувствительности этого элемента в плоскости $x'0y'$ изображения, следует представить в виде

$$S_{\text{А отн}}(x' - x_1, y' - y_1) = \text{rect}\left(\frac{x' - x_1}{a_x}, \frac{y' - y_1}{a_y}\right). \quad (8.27)$$

Электрический сигнал с этого фоточувствительного элемента пропорционален попадающему на него потоку излучения:

$$U^{\text{п}}(x_1, y_1) = S_{\lambda M} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E(x', y') \text{rect}\left(\frac{x' - x_1}{a_x}, \frac{y' - y_1}{a_y} \right) dx' dy' =$$

$$= S_{\lambda M} E(x_1, y_1) * \text{rect}\left(\frac{x_1}{a_x}, \frac{y_1}{a_y} \right) =$$

$$= S_{\lambda M} E(x_1, y_1) \otimes \text{rect}\left(\frac{x_1}{a_x}, \frac{y_1}{a_y} \right) . \qquad (8.28)$$

При выводе выражения (8.28) учтено, что прямоугольная функция является действительной и четной, в связи с чем интегральная операция взаимной ковариации заменена сверткой.

Но центры фоточувствительных элементов МПИ имеют строго упорядоченные координаты, значения которых кратны периодам T_x и T_y. Поскольку сигналы с МПИ передаются через электрические контакты по проводникам, соответствующим значениям координат kT_x и mT_y, это можно рассматривать как δ-образную пространственную локализацию сигналов. Этот факт можно формализовать путем умножения выражения (8.28) на сумму δ-функций, ограниченных в пространстве линейными размерами $l_x = T_x(K-1)$ и $l_y = T_y(M-1)$, равными расстояниям между центрами крайних элементов МПИ. С учетом этого замечания сигнал на выходе МПИ представим в виде

$$U^{\text{МПИ}}(x_1, y_1) = S_{\lambda M} \left[E(x_1, y_1) \otimes \text{rect}\left(\frac{x_1}{a_x}, \frac{y_1}{a_y} \right) \right] \times$$

$$\times \text{rect}\left(\frac{x_1}{l_x}, \frac{y_1}{l_y} \right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x_1 - kT_x, y_1 - mT_y) =$$

$$= S_{\lambda M} \left[E(x_1, y_1) \otimes \text{rect}\left(\frac{x_1}{a_x}, \frac{y_1}{a_y} \right) \right] \text{rect}\left(\frac{x_1}{l_x}, \frac{y_1}{l_y} \right) \times$$

$$\times \frac{1}{T_x T_y} \text{comb}\left(\frac{x_1}{T_x}, \frac{y_1}{T_y} \right). \qquad (8.29)$$

Определим ПЧС этого сигнала. Вычислив двумерное преобразование Фурье от выражения (8.29), получим выражение для фурье-образа сигнала на выходе МПИ:

$$\tilde{U}^{\text{МПИ}}(\nu_x, \nu_y) = F\left\{U^{\text{МПИ}}(x_1, y_1)\right\} =$$

$$= S_{\lambda M} a_x a_y \left[\tilde{E}(\nu_x, \nu_y)\operatorname{sinc}(\pi\nu_x a_x)\operatorname{sinc}(\pi\nu_y a_y)\right] \otimes$$

$$\otimes \operatorname{comb}(\nu_x T_x, \nu_y T_y) \otimes l_x \operatorname{sinc}(\pi\nu_x l_x) \otimes l_y \operatorname{sinc}(\pi\nu_y l_y). \quad (8.30)$$

Рассмотрим функции $l_x \operatorname{sinc}(\pi\nu_x l_x)$ и $l_y \operatorname{sinc}(\pi\nu_y l_y)$. Поскольку число чувствительных элементов по строкам и столбцам МПИ обычно составляет несколько сотен, то $l_x >> T_x$ и $l_y >> T_y$. Поэтому уширением ПЧС за счет свертки с функциями $l_x \operatorname{sinc}(\pi\nu_x l_x)$ и $l_y \operatorname{sinc}(\pi\nu_y l_y)$ можно пренебречь. Формально это означает принятие допущения о том, что справедливы приближенные равенства $l_x \operatorname{sinc}(\pi\nu_x l_x) \approx \delta(\nu_x)$ и $l_y \operatorname{sinc}(\pi\nu_y l_y) \approx \delta(\nu_y)$.

Тогда выражение (8.30) преобразуется к виду

$$\tilde{U}^{\text{МПИ}}(\nu_x, \nu_y) \approx S_{\lambda M} a_x a_y \times$$

$$\times \left[\tilde{E}(\nu_x, \nu_y)\operatorname{sinc}(\pi\nu_x a_x)\operatorname{sinc}(\pi\nu_y a_y)\right] \otimes \operatorname{comb}(\nu_x T_x, \nu_y T_y) =$$

$$= S_{\lambda M} a_x a_y \left[\tilde{E}(\nu_x, \nu_y)\operatorname{sinc}(\pi\nu_x a_x)\operatorname{sinc}(\pi\nu_y a_y)\right] \otimes$$

$$\otimes \frac{1}{T_x T_y} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(\nu_x - \frac{k}{T_x}, \nu_y - \frac{m}{T_y}\right) = \frac{S_{\lambda M} a_x a_y}{T_x T_y} \times$$

$$\times \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{E}\left(\nu_x - \frac{k}{T_x}, \nu_y - \frac{m}{T_y}\right) \operatorname{sinc}\left[\pi a_x \left(\nu_x - \frac{k}{T_x}\right)\right] \times$$

$$\times \operatorname{sinc}\left[\pi a_y \left(\nu_y - \frac{m}{T_y}\right)\right]. \quad (8.31)$$

Проведем анализ ПЧС сигнала на выходе МПИ. Для этого достаточно выполнить расчеты одного сечения нормированного ПЧС сигнала на выходе МПИ, например, при $\nu_y = 0$. Предположим, что регистрируемый объект является точечным, а сечение нормированного ПЧС распределения облученности определяется ОПФ дифракционно ограниченного объектива и описывается функцией вида

$$\tilde{E}_{\text{н}}\left(\nu_x, \nu_y\right) = \tilde{H}_{\text{пх}}^{\text{ос}}\left(\nu_x, \nu_y\right) = \left(1 - \frac{|\nu_x|}{\nu_{xM}}\right)\left(1 - \frac{|\nu_y|}{\nu_{yM}}\right), \qquad (8.32)$$

где $|\nu_x| \le \nu_{xM}$, $|\nu_y| \le \nu_{yM}$; ν_{xM}, ν_{yM} — граничные пространственные частоты.

В качестве примера примем следующие значения исходных данных: $a_x = 0{,}020$ мм; $T_x = 0{,}025$ мм; $\nu_{xM} = 30\,\text{мм}^{-1}$. На рис. 8.7 представлено сечение составляющих этого спектра, определяемых выражением (8.31) при $k = 0$ и $k = \pm 1$, а также нормированного результирующего суммарного ПЧС $\tilde{U}_\Sigma\left(\nu_x\right)$ сигнала на выходе МПИ.

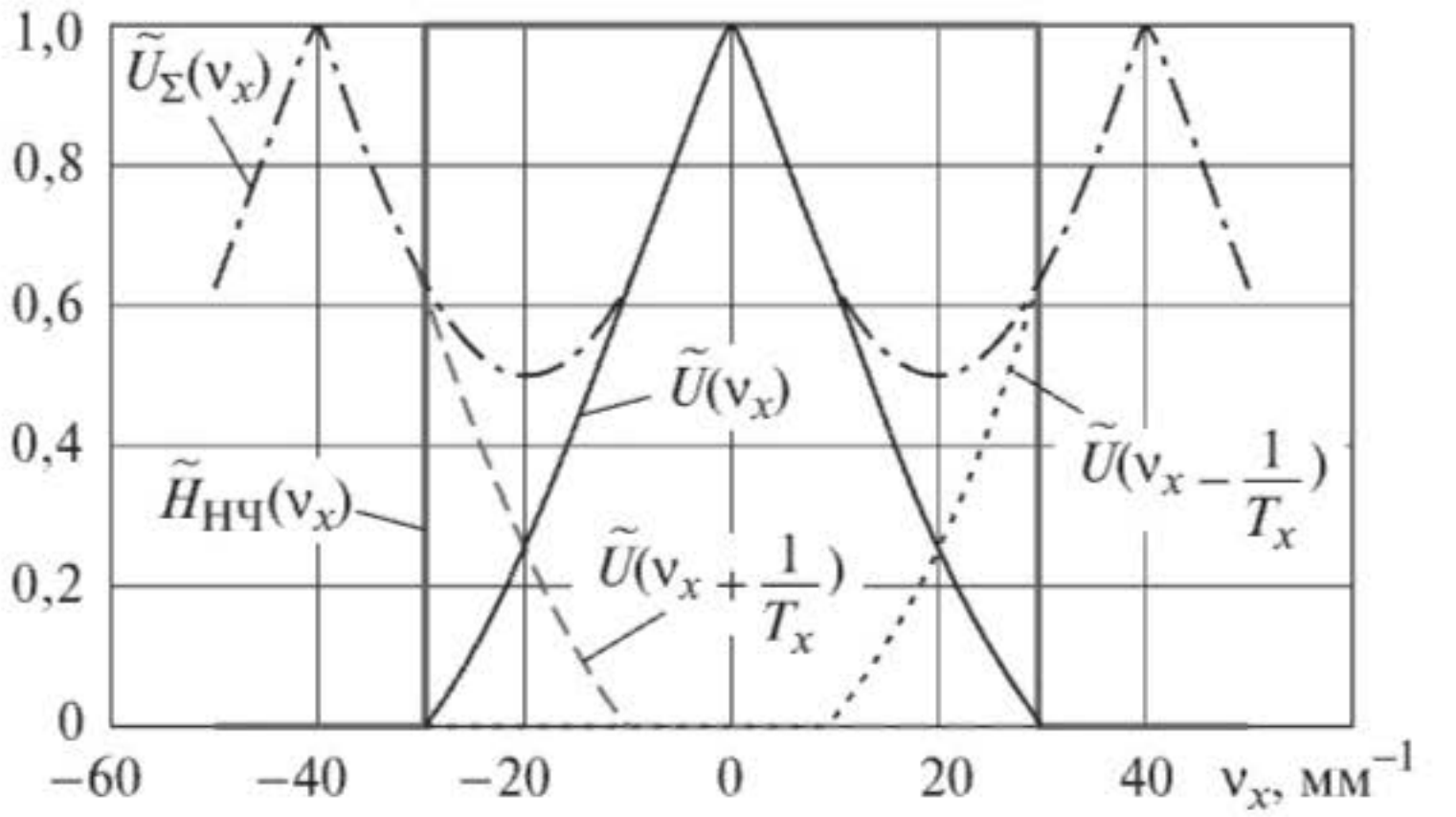


Рис. 8.7. Сечение составляющих нормированного ПЧС $\tilde{U}_\Sigma\left(\nu_x\right)$ сигнала на выходе МПИ при $\nu_{xM} = 30$ мм$^{-1}$

В рассмотренном примере составляющие ПЧС сигнала пересекаются, что приводит к искажению спектра в пределах диапазона спектра исходного сигнала. Это является следствием невыполнения условия теоремы Котельникова $T_x = 0{,}025$ мм $> \frac{1}{2\nu_{xM}} = \frac{1}{2 \cdot 30} = 0{,}0167$ мм. По условиям теоремы Котельникова для восстановления сигнала после дискретизации следует пропустить его через идеальный низкочастотный фильтр с передаточной функцией $\tilde{H}_{\text{нч}}\left(\nu_x, \nu_y\right) = \text{rect}\left(\frac{\nu_x}{2\nu_{xM}}, \frac{\nu_y}{2\nu_{yM}}\right)$. Результат такой фильтрации также представлен на рис. 8.7. Вследствие перена-

ложения исходного спектра с побочными составляющими нельзя восстановить сигнал без искажений.

На рис. 8.8 представлено сечение составляющих спектров, рассчитанных при $a_x = 0{,}020$ мм, $T_x = 0{,}025$ мм, $\nu_{xM} = 20$ мм$^{-1}$, когда условия теоремы Котельникова выполняются.

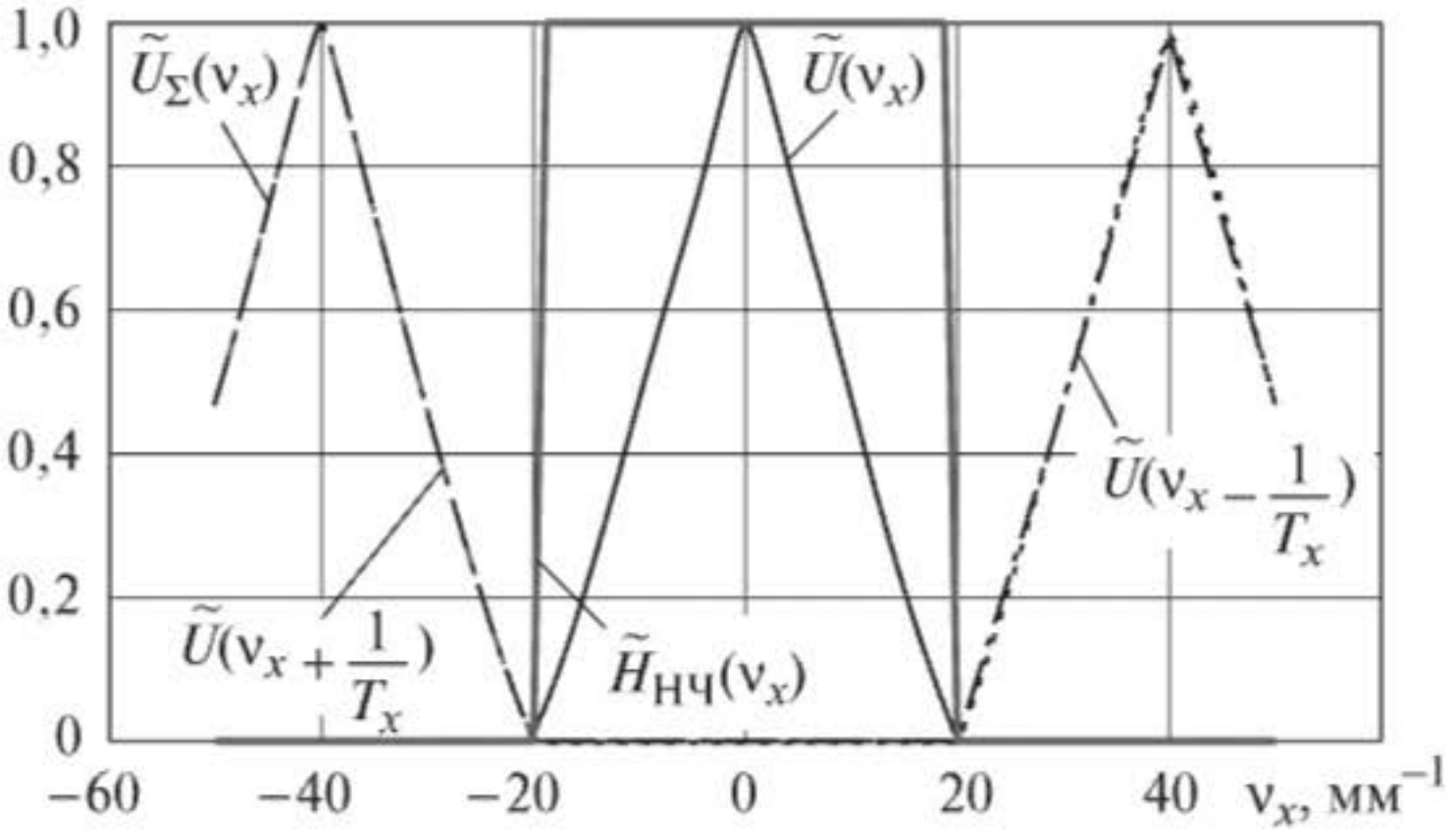


Рис. 8.8. Сечение нормированного ПЧС $\tilde{U}_\Sigma(\nu_x)$ сигнала на выходе МПИ при $\nu_{xM} = 20$ мм$^{-1}$

Как видно на рис. 8.8, при соблюдении условий теоремы Котельникова составляющие ПЧС сигнала не пересекаются. Тогда, пропустив сигнал через идеальный низкочастотный фильтр, можно восстановить исходный спектр, следовательно, и сигнал без искажений. Следует отметить, что для достижения такого результата необходимо ограничить предельную пространственную частоту сигнала, который формируется ОС, например за счет введения расфокусировки. Такой прием известен как предварительная фильтрация сигнала перед его пространственной дискретизацией.

8.3.3. Описание преобразования оптических сигналов линейкой приемников излучения

При использовании в ОЭП линейки ПИ (ЛПИ) для преобразования оптического сигнала в электрический достаточно провести сканирование изображения в направлении только одной координаты, перпендикулярной оси линейки (рис. 8.9).

В процессе сканирования возможны два режима регистрации оптического сигнала чувствительными элементами ЛПИ:

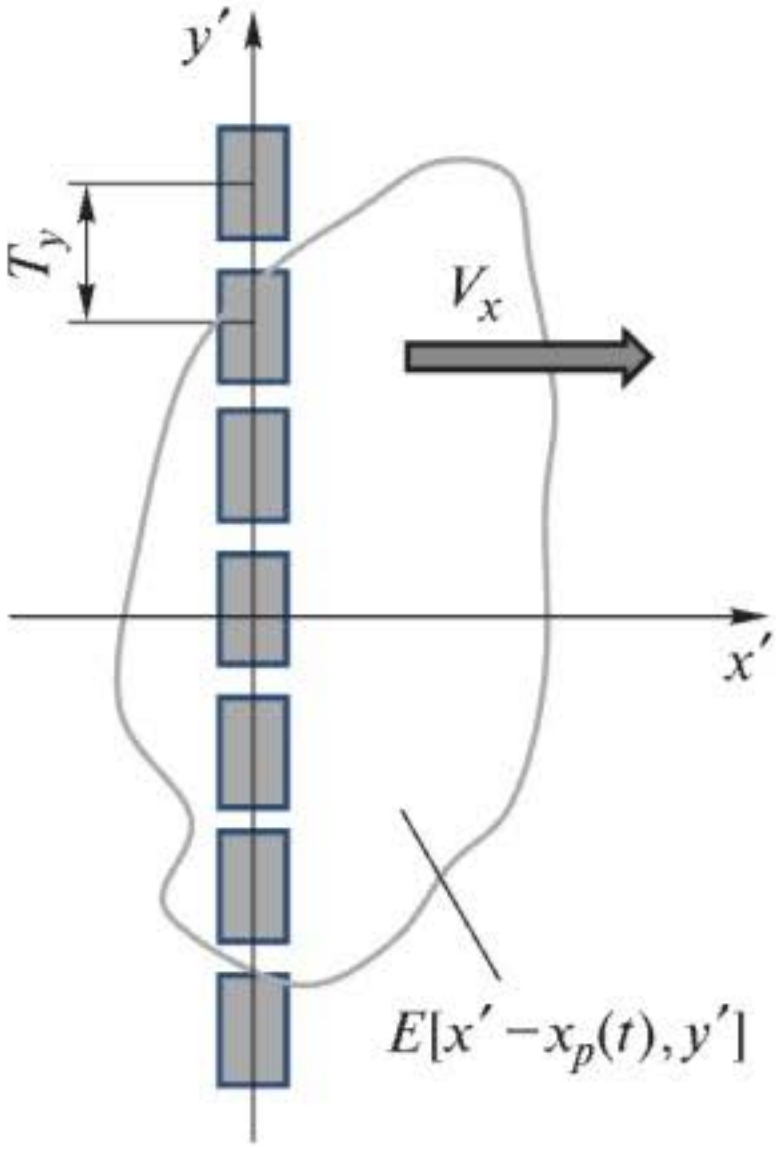


Рис. 8.9. Сканирование изображения ЛПИ

• регистрация мгновенных значений сигналов;

• регистрация массива дискретных значений сигналов, накопленных каждым из фоточувствительных элементов ЛПИ за промежутки времени в процессе сканирования.

В том и в другом случаях будем предполагать, что осуществляется циклическое сканирование в направлении оси x' с временным периодом $T_к$, при котором ЛПИ неподвижна, а изображение объектов, формируемое ОС, в течение времени T_c сканирования перемещается в направлении оси x' по линейному закону. Уравнение закона сканирования в этом случае описывается выражением

$$x_p = x_p(t) = \left[V_x t\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T_c}\right)\right] \otimes \frac{1}{T_к}\mathrm{comb}\left(\frac{t}{T_к}\right). \qquad (8.33)$$

Рассмотрим сигнал с одного из фоточувствительных элементов ЛПИ с координатами центра $(0, y_1)$, причем ордината y_1 имеет произвольное значение. Функцию, описывающую пространственное распределение чувствительности этого элемента, можно представить в виде

$$S_{A\,\text{отн}}(x', y' - y_1) = \mathrm{rect}\left(\frac{x'}{a_x}, \frac{y' - y_1}{a_y}\right), \qquad (8.34)$$

где a_x, a_y — размеры чувствительного элемента ЛПИ.

Мгновенное значение электрического сигнал с данного фоточувствительного элемента ЛПИ пропорционально попадающему на него интегральному потоку излучения:

$$U^{\text{п}}(x_p, y_1) =$$

$$= S_{\lambda M} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E(x' - x_p, y')\,\mathrm{rect}\left(\frac{x'}{a_x}, \frac{y' - y_1}{a_y}\right) dx'dy' =$$

$$= S_{\lambda M} E(x_p, y_1) * \mathrm{rect}\left(\frac{x_p}{a_x}, \frac{y_1}{a_y}\right) = S_{\lambda M} E(x_p, y_1) \otimes \mathrm{rect}\left(\frac{x_p}{a_x}, \frac{y_1}{a_y}\right). \qquad (8.35)$$

Выведем математические выражения для сигнала и его спектра для двух указанных выше режимов регистрации сигнала на выходе ЛПИ. Если предположить, что распределение облученности не изменяется во времени, то при выводе математических выражений достаточно рассмотреть преобразование сигнала ЛПИ только для одного цикла сканирования.

Регистрация мгновенных значений сигналов фоточувствительными элементами линейки приемников излучения при линейном сканировании

Такой принцип регистрации сигналов реализован в рассмотренной выше схеме (см. рис. 8.5). В соответствии с этой схемой мгновенные значения электрических сигналов, зарегистрированных фоточувствительными элементами ЛПИ, поступают в соответствующие параллельно включенные каналы электронного тракта, где подвергаются усилению и преобразованию для передачи их на линейку светодиодов (СД).

При выводе математических выражений учтем, что, во-первых, координаты центров чувствительных элементов в направлении оси y' имеют строго определенные значения, равные mT_y, причем $m = \overline{0, \pm(M-1)/2}$, где M — число элементов в ЛПИ, и, во-вторых, регистрируемые сигналы локализованы (стянуты) в точках с координатами mT_y, которым соответствуют электрические контакты на выходе ЛПИ.

Тогда выражение для электрического сигнала на выходе ЛПИ можно представить в виде

$$U_1^{\text{ЛПИ}}(x_p, y_1) =$$

$$= S_{\lambda M}\left[E(x_p, y_1) \otimes \text{rect}\left(\frac{x_p}{a_x}, \frac{y_1}{a_y}\right)\right]\text{rect}\left(\frac{y_1}{l_y}\right)\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(y_1 - mT_y) =$$

$$= S_{\lambda M}\left[E(x_p, y_1) \otimes \text{rect}\left(\frac{x_p}{a_x}, \frac{y_1}{a_y}\right)\right]\text{rect}\left(\frac{y_1}{l_y}\right)\frac{1}{T_y}\text{comb}\left(\frac{y_1}{T_y}\right), \quad (8.36)$$

где $l_y = T_y(M-1)$ — линейный размер, определяющий расстояние между центрами крайних элементов ЛПИ.

Вычислив двумерное преобразование Фурье от выражения (8.36), получим ПЧС сигнала на выходе ЛПИ:

$$\tilde{U}_1^{\text{ЛПИ}}(\nu_x, \nu_y) = F\left\{U_1^{\text{ЛПИ}}(x_p, y_1)\right\} =$$

$$= S_{\lambda M} a_x a_y \left[\tilde{E}(\nu_x, \nu_y)\operatorname{sinc}(\pi\nu_x a_x)\operatorname{sinc}(\pi\nu_y a_y)\right] \otimes$$

$$\otimes \operatorname{comb}(\nu_y T_y) \otimes l_y \operatorname{sinc}(\pi\nu_y l_y). \qquad (8.37)$$

Поскольку число чувствительных элементов в ЛПИ обычно составляет несколько сотен, то $l_y >> T_y$, и можно принять допущение о том, что $l_y \operatorname{sinc}(\pi\nu_y l_y) \approx \delta(\nu_y)$. Тогда выражение (8.37) преобразуется к виду

$$\tilde{U}_1^{\text{ЛПИ}}(\nu_x, \nu_y) \approx S_{\lambda M} a_x a_y \times$$

$$\times \left[\tilde{E}(\nu_x, \nu_y)\operatorname{sinc}(\pi\nu_x a_x)\operatorname{sinc}(\pi\nu_y a_y)\right] \otimes \operatorname{comb}(\nu_y T_y) =$$

$$= S_{\lambda M} a_x a_y \left[\tilde{E}(\nu_x, \nu_y)\operatorname{sinc}(\pi\nu_x a_x)\operatorname{sinc}(\pi\nu_y a_y)\right] \otimes$$

$$\otimes \frac{1}{T_y} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(\nu_y - \frac{m}{T_y}\right) = \frac{S_{\lambda M} a_x a_y}{T_y} \times$$

$$\times \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{E}\left(\nu_x, \nu_y - \frac{m}{T_y}\right)\operatorname{sinc}(\pi\nu_x a_x)\operatorname{sinc}\left[\pi a_y\left(\nu_y - \frac{m}{T_y}\right)\right]. \qquad (8.38)$$

Линейное сканирование в пределах одного периода осуществляется по закону $x_p = x_{p1}(t) = V_x t,\ 0 \le t \le T_c,$ в связи с чем, кроме выражения (8.40), которое описывает ПЧС, сигнал можно характеризовать его пространственно-временным спектром. Тогда, используя ранее выведенное выражение для ЧВС сигнала на выходе МАИ при линейном сканировании, пространственно-временной спектр сигнала для случая непрерывной регистрация мгновенных значений сигналов фоточувствительными элементами ЛПИ можно представить в виде

$$\tilde{U}_{1t}^{\text{ЛПИ}}(\nu_t, \nu_y) = \frac{S_{\lambda M} a_x a_y}{T_y V_x} \times$$

$$\times \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{E}\left(\frac{\nu_t}{V_x}, \nu_y - \frac{m}{T_y}\right)\operatorname{sinc}\left(\pi\frac{\nu_t}{V_x}a_x\right)\operatorname{sinc}\left[\pi a_y\left(\nu_y - \frac{m}{T_y}\right)\right]. \qquad (8.39)$$

Регистрация массива дискретных значений сигналов фоточувствительными элементами линейки приемников излучения при линейном сканировании

Как отмечалось выше, в этом режиме осуществляется регистрация массива дискретных значений сигналов, которые накапливаются в соответствующих ячейках аналогового регистра (блока конденсаторов), подключенного к выходам фоточувствительных элементов ЛПИ (рис. 8.10).

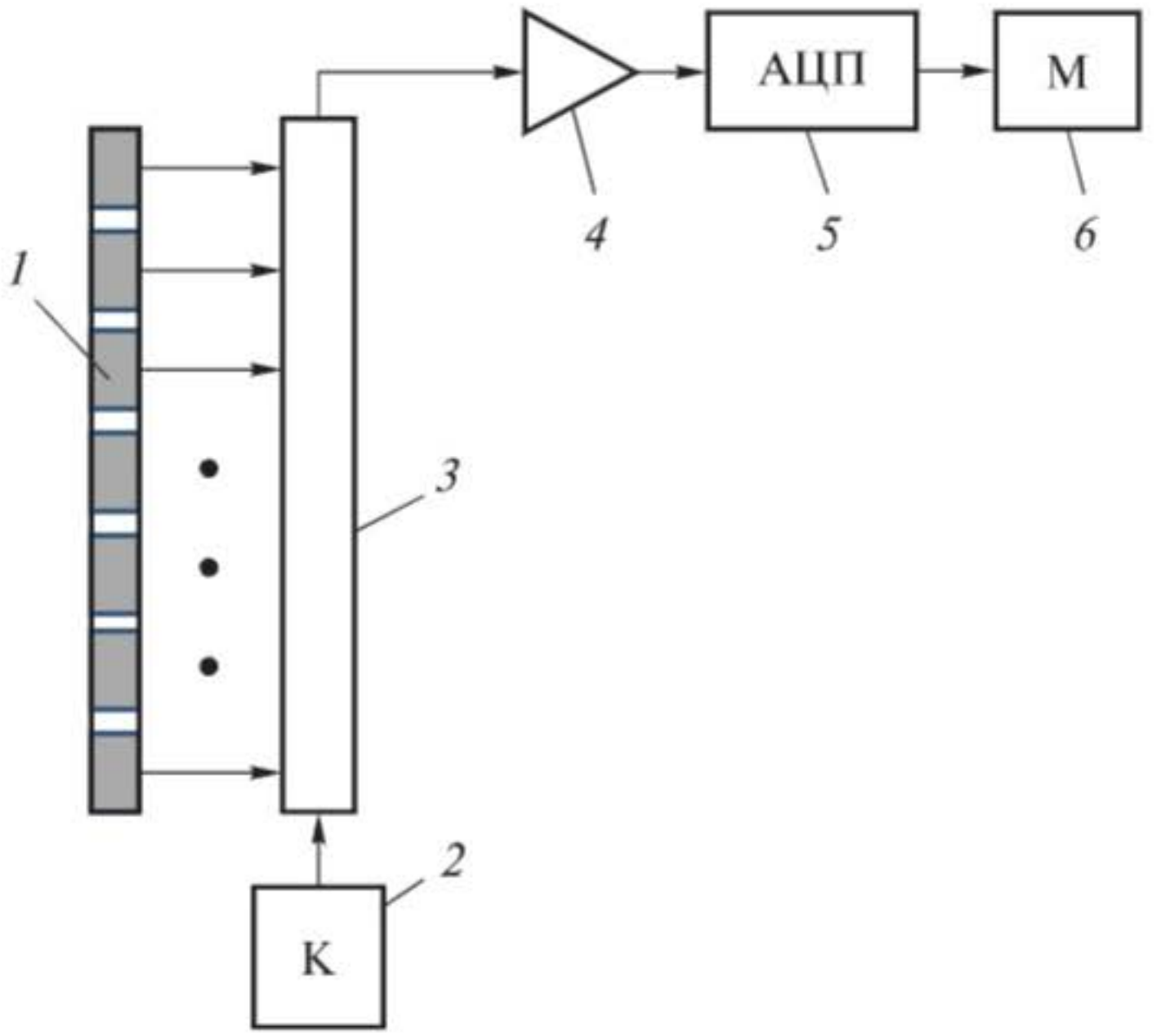


Рис. 8.10. Схема регистрации массива дискретных значений сигналов с фоточувствительных элементов ЛПИ:

1 — линейка ПИ; *2* — контроллер; *3* — аналоговый регистр; *4* — услитель; *5* — аналогово-цифровой преобразователь; *6* — запоминающее устройство

Управление процессами накопления сигналов в ячейках аналогового регистра и мультиплексирования осуществляется контроллером в процессе линейного сканирования в каждом кадре. Временна́я диаграмма, в соответствии с которой осуществляется накопление сигналов и их мультиплексирование, приведена на рис. 8.11.

При накоплении сигналов в процессе сканирования будут возникать дополнительные линейные искажения регистрируе-

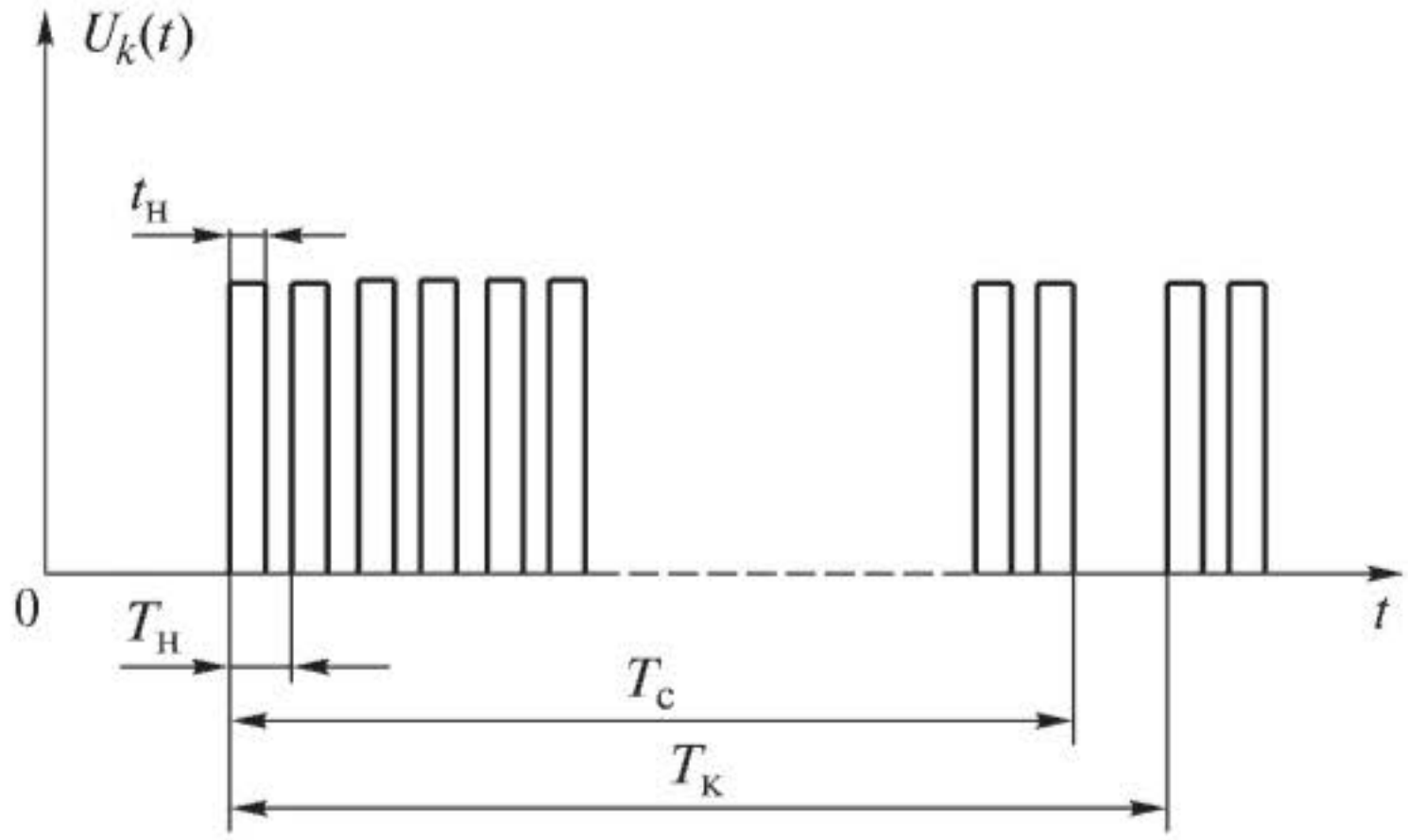


Рис. 8.11. Временна́я диаграмма процессов накопления и мультиплексирования сигналов в ЛПИ:

$T_к$ — период сканирования; $T_с$ — время сканирования; $T_н$ — период циклов накопления сигналов; $t_н$ — время накопления сигналов с чувствительных элементов ЛПИ

мого изображения, которые проявляются в виде так называемого смаза. При сканировании с постоянной линейной скоростью V_x эти дополнительные линейные искажения можно учесть путем увеличения размера a_x чувствительного элемента на $\Delta a_x = V_x t_н$. Поэтому будем в дальнейшем считать, что эффективный размер чувствительного элемента в направлении оси x' $a_{x1} = a_x + \Delta a_x$.

Фиксация сигналов с периодом $T_н$ приводит к тому, что происходит дискретизация сигнала не только по координате y', но и в направлении оси x' с периодом $T_x = T_н V_x$. Поэтому сигнал, регистрируемый в таком режиме работы ЛПИ, описывается выражением

$$U_2^{\text{ЛПИ}}(x_p, y_1) = S_{\lambda M}\left[E(x_p, y_1) \otimes \text{rect}\left(\frac{x_p}{a_{x1}}, \frac{y_1}{a_y}\right)\right] \times$$

$$\times \text{rect}\left(\frac{x_p}{l_x}, \frac{y_1}{l_y}\right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x_p - kT_x, y_1 - mT_y) =$$

$$= S_{\lambda M}\left[E(x_p, y_1) \otimes \text{rect}\left(\frac{x_p}{a_{x1}}, \frac{y_1}{a_y}\right)\right] \text{rect}\left(\frac{x_p}{l_x}, \frac{y_1}{l_y}\right) \times$$

$$\times \frac{1}{T_x T_y} \text{comb}\left(\frac{x_p}{T_x}, \frac{y_1}{T_y}\right), \qquad (8.40)$$

где $l_x = V_x T_c$ — линейный размер, определяющий длину строки в направлении сканирования.

Вычислив двумерное преобразование Фурье от выражения (8.40), получим выражение для ПЧС сигнала, зарегистрированного с ЛПИ,

$$\tilde{U}_2^{\text{ЛПИ}}(\nu_x, \nu_y) = F\left\{\tilde{U}_2^{\text{ЛПИ}}(x_p, y_1)\right\} =$$

$$= S_{\lambda M} a_{x1} a_y \left[\tilde{E}(\nu_x, \nu_y)\operatorname{sinc}(\pi\nu_x a_{x1})\operatorname{sinc}(\pi\nu_y a_y)\right] \otimes$$

$$\otimes \operatorname{comb}(\nu_x T_x, \nu_y T_y) \otimes l_x \operatorname{sinc}(\pi\nu_x l_x) \otimes l_y \operatorname{sinc}(\pi\nu_y l_y). \quad (8.41)$$

Поскольку $l_x >> T_x$ и $l_y >> T_y$, можно принять допущение о том, что $l_x \operatorname{sinc}(\pi\nu_x l_x) \approx \delta(\nu_x)$ и $l_y \operatorname{sinc}(\pi\nu_y l_y) \approx \delta(\nu_y)$. Тогда выражение для ПЧС сигнала, зарегистрированного ЛПИ, преобразуется к виду

$$\tilde{U}_2^{\text{ЛПИ}}(\nu_x, \nu_y) = S_{\lambda M} \cdot a_{x1} a_y \left[\tilde{E}(\nu_x, \nu_y)\operatorname{sinc}(\pi\nu_x a_{x1})\operatorname{sinc}(\pi\nu_y a_y)\right] \otimes$$

$$\otimes \operatorname{comb}(\nu_x T_x, \nu_y T_y) =$$

$$= S_{\lambda M} \cdot a_{x1} a_y \left[\tilde{E}(\nu_x, \nu_y)\operatorname{sinc}(\pi\nu_x a_{x1})\operatorname{sinc}(\pi\nu_y a_y)\right] \otimes$$

$$\otimes \frac{1}{T_x T_y} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(\nu_x - \frac{k}{T_x}, \nu_y - \frac{m}{T_y}\right) =$$

$$= \frac{S_{\lambda M} \cdot a_{x1} a_y}{T_x T_y} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{E}\left(\nu_x - \frac{k}{T_x}, \nu_y - \frac{m}{T_y}\right) \operatorname{sinc}\left[\pi a_{x1}\left(\nu_x - \frac{k}{T_x}\right)\right] \times$$

$$\times \operatorname{sinc}\left[\pi a_y\left(\nu_y - \frac{m}{T_y}\right)\right]. \quad (8.42)$$

Полученное выражение очень похоже на выражение (8.31) для ПЧС сигнала, зарегистрированного МПИ. Отличие заключается в том, что период T_x пространственной дискретизации в направлении оси x' при таком варианте считывания сигнала может быть выбран в несколько раз меньше эффективного размера a_{x1} чувствительного элемента ЛПИ, а именно $T_x = T_{\text{н}} V_x \approx a_{x1}/n$. Это позволяет практически исключить помехи, обусловленные дискретизацией вдоль оси x', если при восстановлении сигнала использовать идеальный низкочастотный фильтр.

Следует отметить, что при увеличении времени $t_н$ накопления сигналов возрастает значение регистрируемого сигнала. Но при этом возрастают и линейные искажения, обусловленные смазом изображения, а также увеличиваются период $T_н$ циклов накопления и период T_x дискретизации по оси x'. Поэтому при разработке ОЭП с ЛПИ следует искать компромиссное решение для выбора времени $t_н$ накопления сигналов.

9. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИГНАЛОВ ЭЛЕКТРОННОЙ СИСТЕМОЙ

9.1. Назначение и методы обработки сигналов в электронной системе оптико-электронных приборов

В соответствии с обобщенной схемой ОЭП электрические сигналы с выхода одно- или многоэлементного ПИ поступают в ЭС, где осуществляются их усиление, фильтрация от помех, а также измерение (оценка) значений параметров сигналов, в которых содержится информация об объектах. Электронная система современных ОЭП состоит из двух частей: аналоговой и цифровой.

Усиление сигнала является необходимой функцией обработки сигнала, которая позволяет существенно уменьшить влияние помех, источниками которых могут быть звенья ЭС. При обработке сигналов аналоговыми средствами ЭС для подавления помех в основном используются методы линейной фильтрации помех, которые совмещаются с функцией усиления. При этом для извлечения информации о параметрах объектов используются методы детектирования электрического сигнала. Например, если информация об объекте закодирована МАИ в амплитуде периодического сигнала, то для извлечения этой информации используются методы амплитудного детектирования, если информация закодирована в фазе или частоте, то используется фазовое или частотное детектирование. Детектирование сигналов осуществляется путем линейных, нелинейных и параметрических преобразований сигналов.

Методы цифровой обработки сигналов по сравнению с аналоговыми обладают более широкими возможностями и могут быть реализованы на специальных вычислительных средствах, например на программируемых логических интегральных микросхемах

(ПЛИС), или программным путем на универсальных бортовых вычислителях. Для анализа результатов цифровой обработки сигналов применяется математический аппарат, рассмотрение которого выходит за рамки данной дисциплины. Поэтому здесь рассмотрены методы преобразования сигналов только в аналоговой части ЭС, и в основном методы линейной обработки сигналов.

9.2. Преобразование детерминированных сигналов линейной электронной системой

Если ЭС представляет собой линейную систему, у которой характеристики не изменяются с течением времени, то говорят, что линейная система стационарна или инвариантна во времени. Инвариантная во времени линейная электронная система (рис. 9.1) характеризуется импульсным откликом $H_{ЭС}(t)$, который является реакцией на входной импульсный сигнал в виде δ-функции $\delta(t)$.

При заданном входном детерминированном сигнале $U^{ВХ}(t)$ сигнал на выходе линейной инвариантной во времени системы определяется интегралом свертки

Рис. 9.1. Линейная инвариантная во времени ЭС

$$U^{ВЫХ}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} U^{ВХ}(\tau) H_{ЭС}(t-\tau) d\tau. \qquad (9.1)$$

Для реальных физических систем выполняется условие $H_{ЭС}(t-\tau) = 0$ при $t < \tau$. Это принцип физической реализуемости, который означает, что отклик временной системы не может опережать воздействие.

Вычислив преобразование Фурье от выражения (9.1), получим временной спектр выходного сигнала

$$\tilde{U}^{ВЫХ}(\nu_t) = \tilde{U}^{ВХ}(\nu_t)\tilde{H}_{ЭС}(\nu_t), \qquad (9.2)$$

где $\tilde{H}_{ЭС}(\nu_t) = F\{H_{ЭС}(t)\}$ — передаточная функция (частотная характеристика) линейной ЭС.

Если на вход линейной системы поступает периодический сигнал $U^{ВХ}(t) = U^{ВХ}(t+T_0)$, то спектр выходного сигнала имеет вид

$$\tilde{U}^{\text{вых}}(\nu_t) = \tilde{H}_{\text{эс}}(\nu_t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \delta(\nu_t - \nu_{tk}), \tag{9.3}$$

где C_k — комплексные амплитуды гармоник периодического сигнала на частотах $\nu_{tk} = \dfrac{k}{T_0}$, которые определяются следующим выражением:

$$C_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} U^{\text{вх}}(t) \exp(-i \cdot 2\pi\nu_{tk} t)\, dt. \tag{9.4}$$

Входными сигналами для ЭС являются электрические сигналы, формируемые на выходе ПИ после преобразования оптического сигнала МАИ, а также сигналы от отдельных чувствительных элементов МПИ и ЛПИ.

9.3. Преобразование случайных сигналов линейной электронной системой

Если на вход линейной инвариантной во времени ЭС поступают реализации сигналов, представляющие собой стационарный случайный процесс, то описание преобразования таких сигналов проводится в рамках корреляционной теории. Это означает, что описание входных и выходных сигналов задается корреляционными функциями или спектральными плотностями (ЧВС). Как было показано выше (см. (3.31) и (3.33)), связь между корреляционными функциями или спектральными плотностями (ЧВС) на входе и выходе линейной инвариантной во времени ЭС описывается следующими выражениями:

$$Kr^{\text{вых}}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Kr^{\text{вх}}(t_1 - t_2 + \tau) H_{\text{ЭС}}(t_1) H_{\text{ЭС}}(t_2)\, dt_1 dt_2; \tag{9.5}$$

$$\tilde{K}r^{\text{вых}}(\nu_t) = \tilde{K}r^{\text{вх}}(\nu_t) \left| \tilde{H}_{\text{ЭС}}(\nu_t) \right|^2; \tag{9.6}$$

$$Kr^{\text{вых}}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{K}r^{\text{вх}}(\nu_t) \left| \tilde{H}_{\text{ЭС}}(\nu_t) \right|^2 \exp(i \cdot 2\pi\nu_t \tau)\, d\tau. \tag{9.7}$$

Если распределение яркости в пространстве предметов ОЭП представляет собой однородное случайное поле, образованное фоном, то входным сигналом для ЭС являются реализации в виде аддитивной смеси внешнего случайного сигнала, преобразованного ОС, МАИ и ПИ, а также внутренней помехи ПИ (шума ПИ). Спектральная плотность такого случайного сигнала на входе ЭС описывается выражением

$$\tilde{K}r^{\text{вх}}(\nu_t) = \tilde{K}r_{\Phi}^{\text{ПИ}}(\nu_t) + \tilde{K}r_{\text{ш}}^{\text{ПИ}}(\nu_t), \qquad (9.8)$$

где $\tilde{K}r_{\Phi}^{\text{ПИ}}(\nu_t)$ — спектральная плотность случайного сигнала от внешнего фона; $\tilde{K}r_{\text{ш}}^{\text{ПИ}}(\nu_t)$ — спектральная плотность шума ПИ.

При апериодическом движении МАИ, например при линейном сканировании, спектральная плотность случайного сигнала на выходе линейной ЭС имеет вид

$$\tilde{K}r^{\text{вых}}(\nu_t) = \left[\tilde{K}r_{\Phi}^{\text{ПИ}}(\nu_t) + \tilde{K}r_{\text{ш}}^{\text{ПИ}}(\nu_t)\right]\left|\tilde{H}_{\text{ЭС}}(\nu_t)\right|^2. \qquad (9.9)$$

При периодическом движении МАИ (круговое сканирование или вращательное движение) спектральная плотность случайного сигнала на выходе линейной ЭС определяется выражением

$$\tilde{K}r^{\text{вых}}(\nu_t) = \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} Kr_{\Phi k}^{\text{ПИ}}\delta(\nu_t - \nu_{tk}) + \tilde{K}r_{\text{ш}}^{\text{ПИ}}(\nu_t)\right]\left|\tilde{H}_{\text{ЭС}}(\nu_t)\right|^2, \qquad (9.10)$$

где $\tilde{K}r_{\Phi k}^{\text{ПИ}}$ — k-я гармоника корреляционной функции случайного сигнала от фона на выходе ПИ.

Дисперсия сигналов для случаев апериодического и периодического движения МАИ соответственно может быть вычислена по следующим формулам:

$$D^{\text{вых}} = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\tilde{K}r_{\Phi}^{\text{ПИ}}(\nu_t) + \tilde{K}r_{\text{ш}}^{\text{ПИ}}(\nu_t)\right]\left|\tilde{H}_{\text{ЭС}}(\nu_t)\right|^2 d\nu_t; \qquad (9.11)$$

$$D^{\text{вых}} = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} Kr_{\Phi k}^{\text{ПИ}}\delta(\nu_t - \nu_{tk}) + \tilde{K}r_{\text{ш}}^{\text{ПИ}}(\nu_t)\right]\left|\tilde{H}_{\text{ЭС}}(\nu_t)\right|^2 d\nu_t. \qquad (9.12)$$

9.4. Преобразование детерминированных сигналов нелинейной электронной системой

Для выполнения нелинейных операций, которые, в частности, выполняются при детектировании сигналов, в ЭС используются нелинейные элементы. Нелинейные элементы (НЭ) разделяют на резистивные и нерезистивные. Отличие резистивных НЭ от нерезистивных заключается в том, что они являются безынерционными, т. е. не вносят линейных искажений в сигнал.

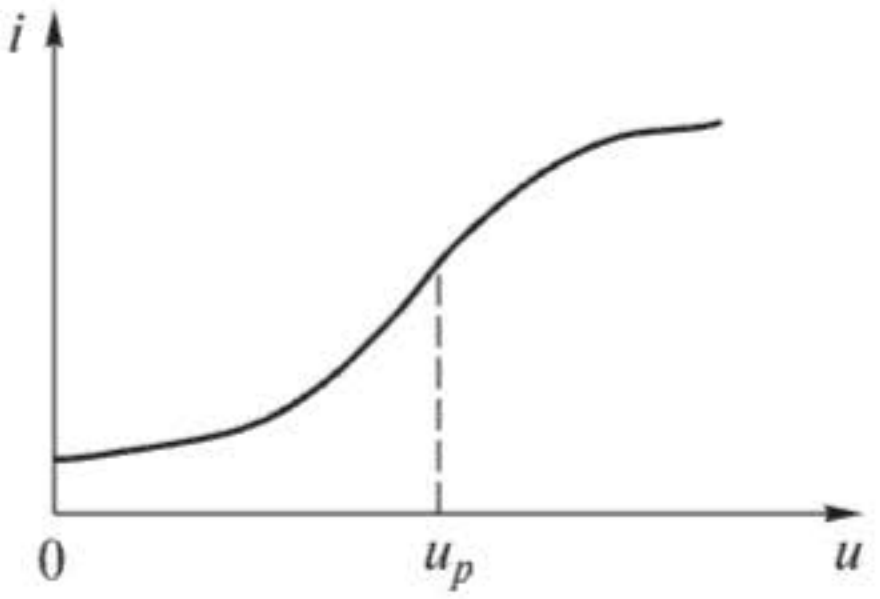


Рис. 9.2. Вольт-амперная характеристика резистивного НЭ

На рис. 9.2 в качестве примера представлена вольт-амперная характеристика (ВАХ) резистивного НЭ.

Эту нелинейную характеристику в окрестности рабочей точки u_p НЭ можно представить степенным рядом

$$i\left(u-u_p\right)=\sum_{k=0}^{N} b_k\left(u-u_p\right)^k, \tag{9.13}$$

где b_k — постоянные коэффициенты.

В зависимости от требуемой точности аппроксимации данный ряд может быть ограничен несколькими членами. Рассмотрим пример преобразования гармонического сигнала резистивным НЭ, когда его ВАХ аппроксимируется полиномом второй степени.

Пусть входной гармонический сигнал имеет вид

$$u(t)=a\cos\left(2\pi\nu_0 t\right), \tag{9.14}$$

а вольт-амперная характеристика резистивного НЭ определяется выражением

$$i(u)=b_0+b_1u+b_2u^2. \tag{9.15}$$

Подставив выражение (9.14) в (9.15), получим

$$i(t)=b_0+b_1a\cos\left(2\pi\nu_0 t\right)+b_2a^2\cos^2\left(2\pi\nu_0 t\right)=$$

$$=b_0+b_1a\cos\left(2\pi\nu_0 t\right)+\frac{b_2a^2}{2}+\frac{b_2a^2}{2}\cos\left(4\pi\nu_0 t\right). \tag{9.16}$$

Таким образом, в выходном сигнале после нелинейного преобразования появились дополнительные составляющие, а именно постоянная составляющая и вторая гармоника сигнала.

Структурная схема нерезистивных НЭ может быть представлена композицией нелинейных резистивных (безынерционных) элементов и линейных элементов. Описание преобразования сигналов нерезистивными НЭ может быть выполнено методами фурье-анализа с использованием функциональных полиномов Вольтерра. Подробное изложение такого подхода для описания преобразования детерминированных и случайных сигналов нелинейными элементами изложено в работе [8].

10. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИГНАЛОВ ВИДЕОКОНТРОЛЬНЫМИ УСТРОЙСТВАМИ

10.1. Назначение и примеры видеоконтрольных устройств

Видеоконтрольные устройства (ВКУ) входят в состав ОЭП наблюдения и предназначены для формирования изображений, наблюдаемых человеком-оператором. Типичным примером ВКУ являются телевизионные мониторы, которые могут работать на различных физических принципах, начиная от мониторов с электронно-лучевыми трубками (ЭЛТ) и кончая современными мониторами с дисплеями на основе жидкокристаллических (ЖК) экранов и дисплеев со светодиодной подсветкой (LED TV). Кроме телевизионных мониторов, для формирования выходного изображения в ОЭП наблюдения используются устройства, работающие и на других принципах. Например, в тепловизорах с параллельным сканированием и параллельной обработкой сигналов (см. рис. 8.5) формирование изображения осуществляется в процессе развертки (сканирования) изображения ЛСД сканирующим устройством в виде качающегося зеркала, а наблюдение изображения осуществляется в окуляр.

Основные технические параметры мониторов телевизионного типа:

- число элементов разрешения (пикселей) в формируемом изображения в направлении строк и столбцов;
- размеры пикселей;
- диапазон значений яркости в формируемом изображении;

• частота кадров;
• закон развертки изображения (например, чересстрочный, прогрессивный).

10.2. Постановка задачи модельного описания видеоконтрольного устройства

При модельном описании ВКУ будем абстрагироваться от конкретных схемотехнических решений. В математической модели должны быть отражены только самые существенные операции, которые выполняет ВКУ при преобразовании электрического сигнала в оптический сигнал, представленный упорядоченной совокупностью элементов изображения (пикселей), яркость которых зависит от амплитуды электрического сигнала.

Для такого описания ВКУ примем следующие допущения и ограничения, а также дополним приведенный выше перечень параметров ВКУ.

1. Будем считать, что характеристика $L_{\text{ВКУ}}(U)$, описывающая преобразование электрического сигнала в оптический в виде яркости свечения экрана, линейна в диапазоне значений входного сигнала $U \le U_{\max}$. Тогда преобразование сигнала, осуществляемое ВКУ, можно оценить крутизной этой характеристики

$$S_{\text{ВКУ}} = \left.\frac{dL_{\text{ВКУ}}}{dU}\right|_{U=0}.$$

2. Примем, что ВКУ безынерционно, т. е. не вносит линейных искажений во временно́й сигнал, который представляется последовательностью кадров.

3. Будем считать, что число элементов изображения (пикселей) и соотношение размеров по вертикали и горизонтали изображения, формируемого ВКУ, такое же, как у изображения, которое регистрируется в приемной части ОЭП.

10.3. Математическое описание преобразования сигналов видеоконтрольным устройством

Как было показано выше, при регистрации сигналов многоэлементными ПИ, в том числе МПИ и ЛПИ, сигнал подвергается дискретизации по двум или одной пространственным координатам. Следует отметить [9], что при преобразовании сигналов

в ОЭП со строчным сканированием одноэлементным ПИ по прогрессивному закону также происходит дискретизация сигнала по координате, перпендикулярной направлению сканирования.

Процесс пространственной дискретизации описывается умножением двумерного сигнала на соответствующую гребенчатую функцию. Согласно теореме Котельникова, для восстановления исходного оптического сигнала, подвергнутого дискретизации по обеим координатам, требуется подвергнуть его пространственной фильтрации идеальным низкочастотным фильтром, передаточная функция которого имеет вид

$$\tilde{H}_{\text{н.ч}}\left(\nu_x, \nu_y\right) = \operatorname{rect}\left(\frac{\nu_x}{2\nu_{xM}}, \frac{\nu_y}{2\nu_{yM}}\right), \qquad (10.1)$$

где ν_{xM}, ν_{yM} — граничные (максимальные) пространственные частоты исходного сигнала. При этом импульсный отклик описывается функцией

$$H_{\text{ВКУ}}(x, y) = 4\nu_{xM}\nu_{yM} \operatorname{sinc}\left(2\pi\nu_{xM}x\right) \operatorname{sinc}\left(2\pi\nu_{yM}y\right). \qquad (10.2)$$

Очевидно, что фильтр с таким импульсным откликом физически не реализуем. Как отмечалось выше, в качестве ВКУ, которые осуществляют преобразование электрического сигнала в оптический, могут быть использованы оптико-механические устройства с линейкой СД (см. рис. 8.5), а также телевизионные мониторы с ЭЛТ-, ЖК- или LED-дисплеями. Импульсный отклик ВКУ с ЭЛТ достаточно хорошо аппроксимируется двумерной функцией Гаусса

$$H_{\text{ВКУ}}(x, y) = \frac{1}{2\pi r^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2r^2}\right), \qquad (10.3)$$

где r — эффективный размер пятна рассеяния пучка электронов на экране ЭЛТ.

Импульсный отклик ВКУ с линейки СД или ВКУ в виде монохромных ЖК- и LED-дисплеев можно описывать прямоугольной функцией вида

$$H_{\text{ВКУ}}(x, y) = \frac{1}{b_x b_y} \operatorname{rect}\left(\frac{x}{b_x}, \frac{y}{b_y}\right), \qquad (10.4)$$

где b_x, b_y — линейные размеры пикселей.

Очевидно, что вид импульсных откликов реальных ВКУ существенно отличается от импульсного отклика идеального НЧ фильтра. В связи с этим сигнал в виде пространственного распределения яркости, формируемый ВКУ, будет иметь искажения. Для того чтобы оценить характер таких искажений, рассмотрим сигнал на выходе ОЭП наблюдения, упрощенная схема которого представлена на рис. 10.1. В этом приборе осуществляется регистрация изображения, формируемого объективом *1*, матричным ПИ *2*, параллельная обработка сигналов в ЭС и воспроизведение изображения на ВКУ в виде матрицы СД *3*.

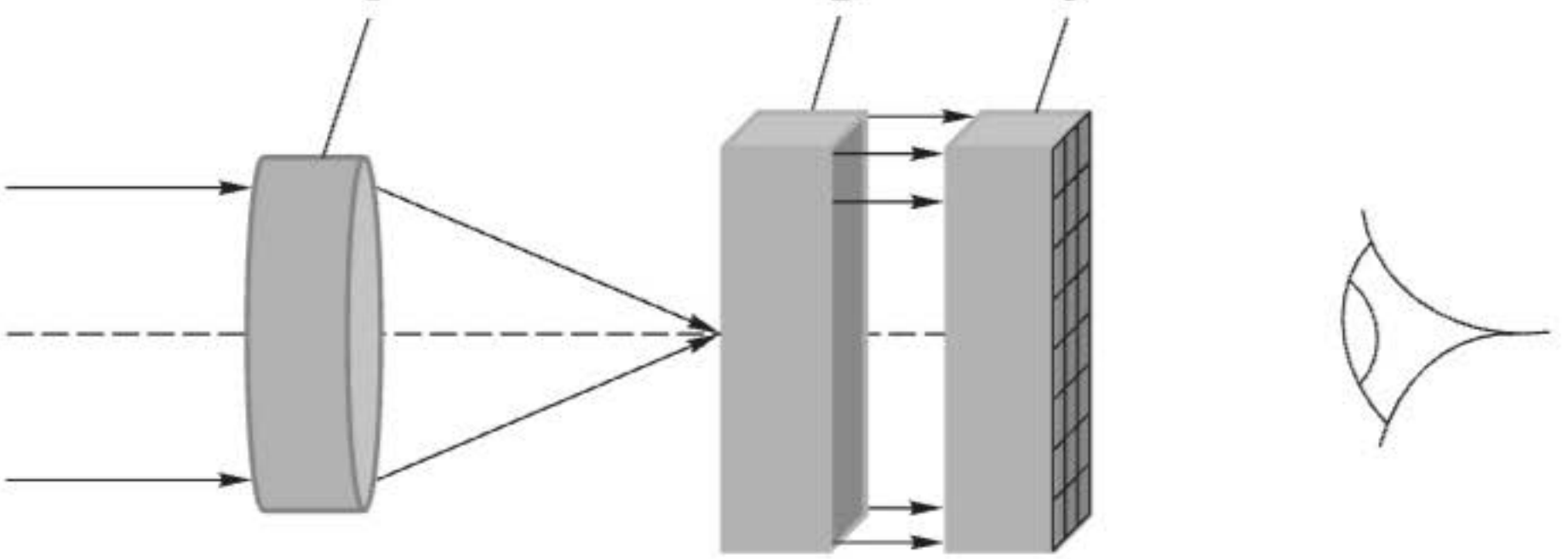


Рис. 10.1. Схема ОЭП наблюдения с регистрацией изображения МПИ и параллельной обработкой сигналов

Примем, что разброс характеристик и параметров элементов МПИ, каналов ЭС и элементов матрицы СД отсутствует. Тогда распределение яркости в изображении, формируемом на экране ВКУ ОЭП наблюдения (см. рис. 10.1), описывается интегралом свертки

$$L_2^{\text{ВКУ}}(x, y) = k_{\text{ЭС}} S_{\text{ВКУ}} U^{\text{МПИ}}(x, y) \otimes H_{\text{ВКУ}}(x, y), \quad (10.5)$$

где $k_{\text{ЭС}}$ — коэффициент преобразования электрического сигнала в каналах ЭС; $S_{\text{ВКУ}}$ — крутизна характеристики элементов ЛСД; $U^{\text{МПИ}}(x, y)$ — сигнал на выходе МПИ, который описывается выражением (8.29); $H_{\text{ВКУ}}(x, y)$ — импульсный отклик элементов ЛСД, которые выполняют операцию низкочастотной фильтрации для восстановления оптического сигнала после его дискретизации.

Вычислив преобразование Фурье от выражения (10.5) с учетом формулы (8.31), получим следующее выражение для ПЧС сигнала на выходе ВКУ:

$$\tilde{L}_2^{\text{ВКУ}}\left(\nu_x, \nu_y\right) = k_{\text{ЭС}} S_{\text{ВКУ}} \tilde{U}^{\text{МПИ}}\left(\nu_x, \nu_y\right) \tilde{H}_{\text{ВКУ}}\left(\nu_x, \nu_y\right) =$$

$$= k\tilde{H}_{\text{ВКУ}}\left(\nu_x, \nu_y\right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{E}\left(\nu_x - \frac{k}{T_x}, \nu_y - \frac{m}{T_y}\right) \times$$

$$\times \operatorname{sinc}\left[\pi a_x \left(\nu_x - \frac{k}{T_x}\right)\right] \operatorname{sinc}\left[\pi a_y \left(\nu_y - \frac{m}{T_y}\right)\right], \qquad (10.6)$$

где $k = \dfrac{k_{\text{ЭС}} S_{\text{ВКУ}} S_{\lambda M} a_x a_y}{T_x T_y}$ — коэффициент; $\tilde{H}_{\text{ВКУ}}\left(\nu_x, \nu_y\right)$ — передаточная функция ВКУ, которая с учетом выражения (10.4) определяется по формуле

$$\tilde{H}_{\text{ВКУ}}\left(\nu_x, \nu_y\right) = \operatorname{sinc}\left(\pi b_x \nu_x\right) \operatorname{sinc}\left(\pi b_y \nu_y\right). \qquad (10.7)$$

Проведем анализ выражения (10.6) для случая, когда проводится регистрация изображения «точечного» объекта. Будем считать, что объектив, формирующий изображения объекта, является дифракционно ограниченным с квадратным зрачком. Тогда ПЧС распределения облученности с точностью до значения E_0 облученности определяется ОПФ дифракционно ограниченного объектива и описывается функцией вида

$$\tilde{E}\left(\nu_x, \nu_y\right) = E_0 \left(1 - \frac{|\nu_x|}{\nu_{xM}}\right)\left(1 - \frac{|\nu_y|}{\nu_{yM}}\right). \qquad (10.8)$$

Как и в примере, рассмотренном в гл. 8, для выполнения расчетов примем следующие исходные данные:

- граничные пространственные частоты ОПФ $\nu_{xM} = \nu_{yM} = 20$ мм$^{-1}$;
- размеры и периоды расположения чувствительных элементов МПИ составляют соответственно $a_x = a_y = 0{,}020$ мм и $T_x = T_y = 0{,}025$ мм.

Поскольку ВКУ представляет собой матрицу СД, то его импульсный отклик описывается функцией (10.4). Примем, что линейное увеличение при переходе от плоскости изображения

объектива к плоскости экрана ВКУ равно единице, а размеры и периоды расположения элементов матрицы СД такие же, как у МПИ, т. е. $b_x = b_y = 0{,}020$ мм; $T_x = T_y = 0{,}025$ мм.

На рис. 10.2 представлены сечения модуля нормированного ПЧС $\tilde{L}_{2\text{н}}^{\text{ВКУ}}(\nu_x, 0)$ сигнала на выходе ВКУ, модуля нормированного сигнала $\tilde{U}_{\text{н}}^{\text{МПИ}}(\nu_x, 0)$ на выходе МПИ и модуля передаточной функции $\left|\tilde{H}_{\text{ВКУ}}(\nu_x, 0)\right|$ ВКУ.

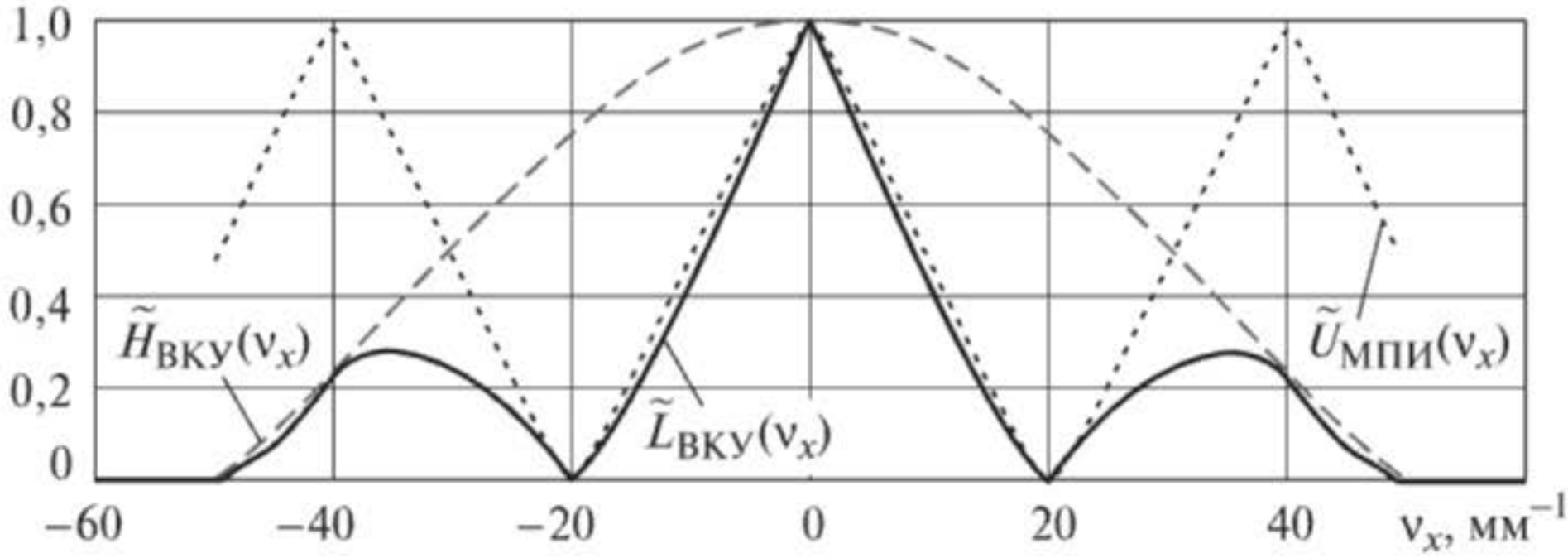


Рис. 10.2. Сечения модуля нормированного ПЧС $\tilde{L}_{2\text{н}}^{\text{ВКУ}}(\nu_x, 0)$ сигнала на выходе ВКУ, модуля нормированного сигнала $\tilde{U}_{\text{н}}^{\text{МПИ}}(\nu_x, 0)$ на выходе МПИ и модуля ПФ $\left|\tilde{H}_{\text{ВКУ}}(\nu_x, 0)\right|$ ВКУ

Несмотря на то что в рассмотренном примере условие $T_x \le 1/2\nu_{xM} = 0{,}25$ мм выполняется, в спектре восстановленного сигнала присутствуют составляющие побочных спектров. Это обусловлено тем, что для восстановления используется пространственный фильтр, который существенно отличается от идеального низкочастотного фильтра.

11. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ОБНАРУЖЕНИЯ СИГНАЛОВ

11.1. Оценка эффективности оптико-электронных приборов

Выше были изложены теоретические основы процессов преобразования детерминированных и случайных сигналов в структурных элементах ОЭП. Полученные математические модели структурных элементов ОЭП позволяют в координатном или

частотном представлении описать преобразование сигналов и помех, действующих в тракте ОЭП, т. е. решить задачу анализа. Но этого недостаточно для решения задач проектирования ОЭП. Целью проектирования является обеспечение требуемой эффективности прибора. Для информационных ОЭП эффективность оценивается вероятностными показателями обнаружения или распознавания, для измерительных ОЭП — погрешностями измерения (оценки) параметров сигналов, которые характеризуют свойства или состояние объектов. Для того чтобы установить связь показателей эффективности с характеристиками сигнала и помех, действующих на выходе ОЭП, необходимо знать алгоритмы, используемые для обнаружения, распознавания и оценки параметров сигналов. Разработка таких алгоритмов является задачей статистического синтеза, которая решается методами математической статистики. Причем обнаружение и распознавание формулируются как задача проверки гипотез, а измерение параметров сигнала — как задача оценки параметров. В дисциплине «Теория оптико-электронных систем» рассматривается только постановка и подходы к решению задачи обнаружения сигналов. Задачи распознавания и оценки параметров сигналов являются предметом изучения отдельных дисциплин и не входят в программу данной дисциплины.

11.2. Постановка задачи обнаружения сигналов

Предположим, что в угловом поле ОЭП с некоторой вероятностью p_1 может появиться объект. Пространственное распределение яркости описывается детерминированной функцией $L(x, y; \vec{\theta})$, которая для заданной дальности определена в пространстве линейных координат x и y, а также в пространстве случайных параметров, которое задается вектором $\vec{\theta}$. В общем случае составляющими вектора $\vec{\theta}$ могут быть координаты x_0 и y_0 объекта, дальность L_D до объекта, ориентация α, β, γ объекта в пространстве и др. Некоторые из параметров, например угловые координаты объекта, могут быть измеряемыми, а остальные — неизмеряемыми. Очевидно, что наличие случайных измеряемых и неизмеряемых параметров усложняет задачу обнаружения сигнала. Примем допущение, что яркость фона в пространстве предметов равномерна, а сигнал от объекта описывается детерминированной функцией, причем все параметры, кроме угловых

координат, известны. Таким образом, случайными измеряемыми параметрами являются угловые координаты объекта в пространстве.

Опуская детали, связанные с преобразованием сигнала $L(x, y; \vec{\theta})$ от объекта в тракте ОЭП, в котором осуществляется линейное сканирование пространства предметов, будем считать, что на выходе ЭС формируются реализации сигнала

$$x(t) = s(t; t_0) + n(t) \tag{11.1}$$

в виде аддитивной смеси сигнала $s(t; t_0)$ от объекта и помехи $n(t)$ обусловленной шумом ПИ. Параметр t_0 в данном случае характеризует положение объекта в пределах углового поля ОЭП и является случайным измеряемым параметром.

Структурная схема информационного ОЭП, осуществляющего обнаружение сигнала от объекта, представлена на рис. 11.1.

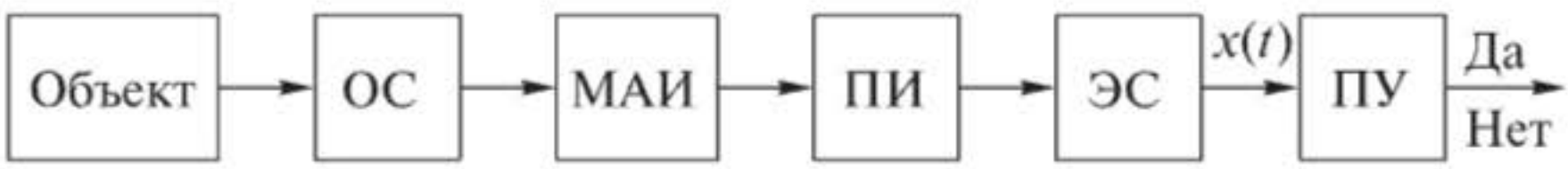


Рис. 11.1. Структурная схема информационного ОЭП

Будем считать, что ЭС представляет собой линейный фильтр, который характеризуется импульсным откликом $H_{ЭС}(t)$ или передаточной функцией $\tilde{H}_{ЭС}(\nu_t)$. Решение об обнаружении сигнала от объекта принимается путем сравнения значений амплитуды реализаций $x(t)$ с пороговым уровнем $X_п$ (рис. 11.2). Правило принятия решений об обнаружении сигнала реализуется в пороговом устройстве (ПУ) и заключается в следующем:

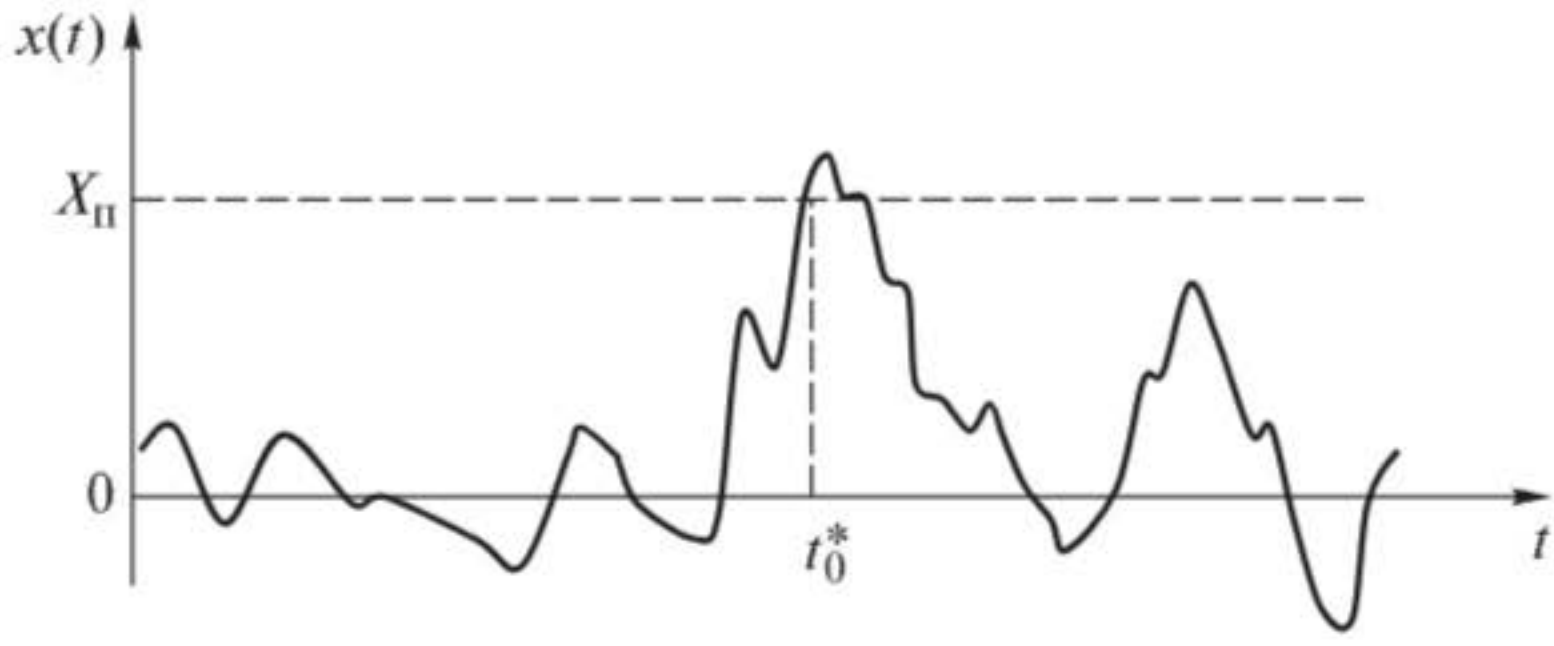


Рис. 11.2. Процедура обнаружения сигнала

• если $\{x(t) \le X_{\text{п}}\}$, то принимается решение об отсутствии сигнала от объекта;

• если $\{x(t) > X_{\text{п}}\}$, то принимается решение о наличии сигнала от объекта.

Таким образом, пороговый уровень $X_{\text{п}}$ разбивает область значений реализаций $x(t)$ на две непересекающиеся области: $X_0 \in \{x(t) \le X_{\text{п}}\}$ и $X_1 \in \{x(t) > X_{\text{п}}\}$.

Из данных на рис. 11.2 следует, что от порогового уровня $X_{\text{п}}$ зависят значения вероятностей правильного и ошибочного обнаружения сигнала от объекта. Кроме того, момент времени t_0^*, когда реализация достигает порогового уровня, можно считать оценкой временно́го положения сигнала, характеризующего положение объекта в угловом поле ОЭП. Неопределенность в принятии решений обусловлена наличием помехи, статистические характеристики которой зависят от эффективности ее подавления в ЭС. Естественно, возникает вопрос об обеспечении наибольшей эффективности ОЭП, ответ на который непосредственно связан с алгоритмом обнаружения. Алгоритм обнаружения позволяет получить ответ на два вопроса, связанных с обеспечением наилучших показателей обнаружения: во-первых, на основе каких критериев следует выбирать пороговый уровень, и, во-вторых, каким должен быть импульсный отклик или передаточная функция у ЭС ОЭП.

11.3. Байесовский алгоритм обнаружения сигнала

В рамках математической статистики задача обнаружения сигнала формулируется в терминах проверки статистических гипотез.

Пусть регистрируется реализация случайного процесса $x(t)$ в виде комбинации сигнала $s(t)$ и помехи $n(t)$, в частности аддитивной суммы $x(t) = s(t) + n(t)$. Подлежит проверке гипотеза H_0, когда в реализации присутствует только помеха, т. е. $x(t) = n(t)$, против альтернативы H_1 — в реализации присутствуют сигнал и помеха, т. е. $x(t) = s(t) + n(t)$. В такой постановке алгоритм обнаружения определяет правило выбора решения в пользу гипотезы или альтернативы.

11.3.1. Классический байесовский алгоритм обнаружения

Классический байесовский алгоритм обнаружения предполагает наличие полной информации о сигнале и помехе, в том числе должны быть известны:

- априорные вероятности $P(H_1) = p_1$ наличия или отсутствия $P(H_0) = p_0$ объекта;
- условные плотности распределения $W(X|H_1)$ и $W(X|H_0)$ выборочных значений реализаций при наличии и отсутствии сигнала от объекта соответственно;
- платежная матрица

$$C = \begin{pmatrix} c_{00} & c_{01} \\ c_{10} & c_{11} \end{pmatrix}. \qquad (11.2)$$

Обсудим эти исходные данные. События, связанные с наличием или отсутствием объекта, образуют полную группу событий. Поэтому должно выполняться условие $p_1 + p_0 = 1$.

Задание функций $W(X|H_1)$ и $W(X|H_0)$ (рис. 11.3.), описывающих условные плотности распределения выборочных значений реализаций, предполагает наличие полной информации о сигнале и помехе. Наличие полной априорной информации о сигнале означает, что сигнал описывается детерминированной функцией с известными параметрами. Вектор X является случайным вектором, который определяет выборочные значения непрерывных реализаций $x(t)$, наблюдаемых на интервале $[0, T]$, а именно: $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$, $X_i = x(t_i)$, $t_{i+1} - t_i = \Delta t$, $n = [1 + T/\Delta t]$.

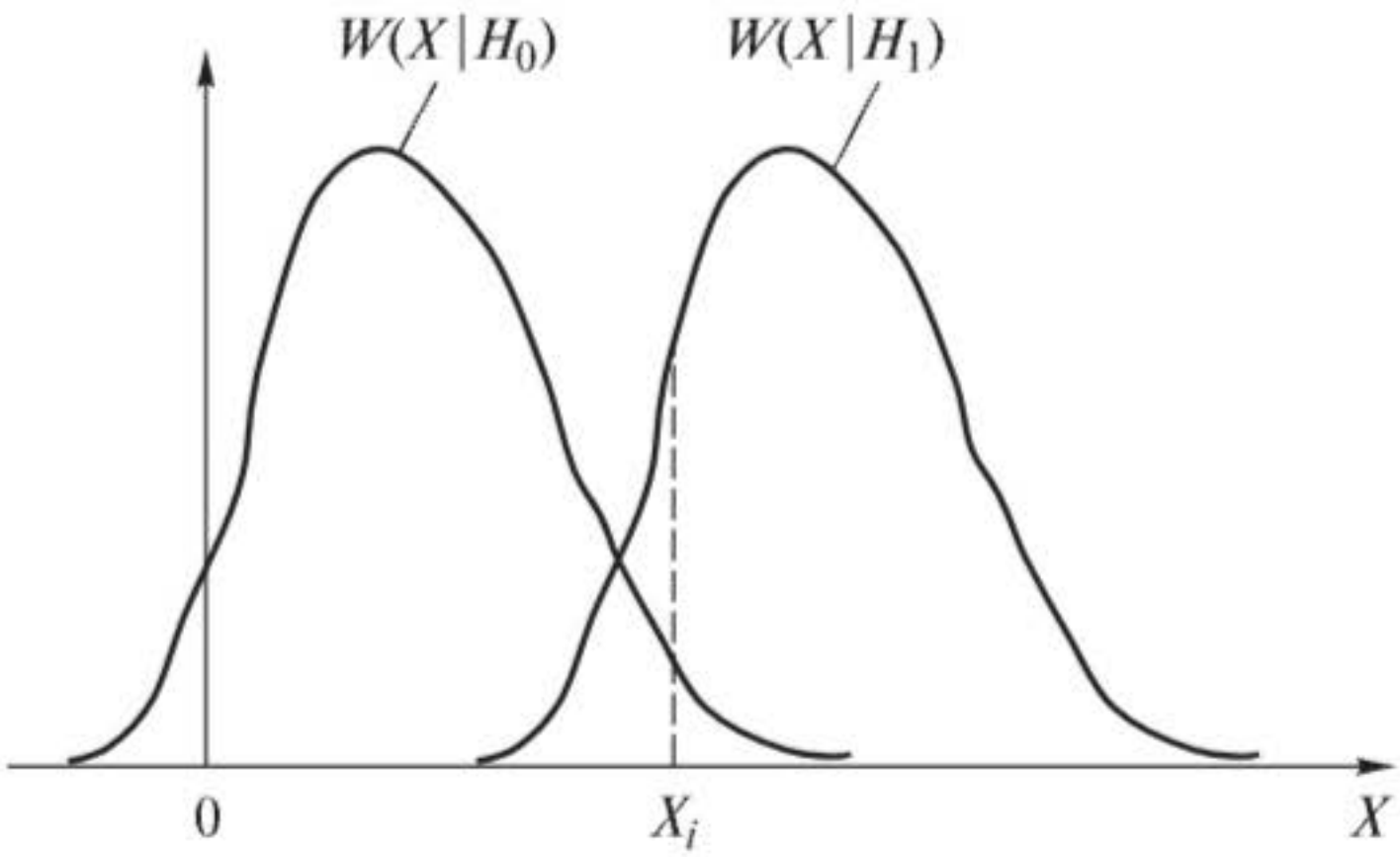


Рис. 11.3. Функции правдоподобия

Условные плотности распределения $W\left(X\middle|H_1\right)$ и $W\left(X\middle|H_0\right)$ позволяют судить о вероятности, с которой выборочное значение X_i реализации соответствует гипотезе или альтернативе. Поэтому эти условные плотности распределения называют функциями правдоподобия.

В задачах обнаружения и оценки параметров сигналов для анализа регистрируемых реализаций в виде выборочных значений $X=\left(X_1, X_2, ..., X_n\right)$ используют понятие отношение правдоподобия:

$$\Lambda(X)=\frac{W\left(X\middle|H_1\right)}{W\left(X\middle|H_0\right)}. \tag{11.3}$$

Применительно к анализу данных в виде непрерывных реализаций используют понятие функционала отношения правдоподобия (ФОП):

$$\hat{\Lambda}(X)=\lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta t\to 0}}\frac{W\left(X_1, ..., X_n\middle|H_1\right)}{W\left(X_1, ..., X_n\middle|H_0\right)}. \tag{11.4}$$

Элементы c_{00} и c_{11} платежной матрицы (11.2) определяют платы за правильные решения об обнаружении, а элементы c_{01} и c_{10} — платы за ошибочные решения, причем c_{01} — плата за ошибочное решение в пользу гипотезы H_0, а c_{10} — плата за ошибочное решение в пользу альтернативы H_1.

Байесовское правило обнаружения позволяет осуществить разбиение области значений реализаций путем минимизации среднего риска, который определяется выражением

$$R=\sum_{i,j=0}^{1}p_i c_{ij}P\left(H_i\middle|H_j\right)=$$

$$=p_0c_{00}P\left(H_0\middle|H_0\right)+p_0c_{01}P\left(H_0\middle|H_1\right)+p_1c_{10}P\left(H_1\middle|H_0\right)+$$

$$+p_1c_{11}P\left(H_1\middle|H_1\right). \tag{11.5}$$

Условные вероятности, входящие в выражение (11.5), характеризуют правильные и ошибочные решения об обнаружении, в том числе:

- правильного необнаружения

$$P\left(H_0\middle|H_0\right)=\int_{-\infty}^{X_{\text{П}}} W\left(X\middle|H_0\right)dX = P_{\text{п.н}}; \tag{11.6}$$

- правильного обнаружения

$$P\left(H_1\middle|H_1\right)=\int_{X_{\text{П}}}^{\infty} W\left(X\middle|H_1\right)dX = P_{\text{п.о}}; \tag{11.7}$$

- пропуска сигнала

$$P\left(H_0\middle|H_1\right)=\int_{-\infty}^{X_{\text{П}}} W\left(X\middle|H_1\right)dX = P_{\text{пр}}; \tag{11.8}$$

- ложной тревоги

$$P\left(H_1\middle|H_0\right)=\int_{X_{\text{П}}}^{\infty} W\left(X\middle|H_0\right)dX = P_{\text{л.т}}. \tag{11.9}$$

Поскольку условные вероятности $P\left(H_0\middle|H_0\right)=P_{\text{п.н}}$ и $P\left(H_1\middle|H_0\right)=P_{\text{л.т}}$, а также $P\left(H_1\middle|H_1\right)=P_{\text{п.о}}$ и $P\left(H_0\middle|H_1\right)=P_{\text{пр}}$ попарно образуют полные группы событий, то $P_{\text{п.н}}+P_{\text{л.т}}=1$ и $P_{\text{п.о}}+P_{\text{пр}}=1$. Поэтому эффективность обнаружения обычно оценивают двумя вероятностями, например вероятностью правильного обнаружения и вероятностью ложной тревоги.

Определим оптимальный байесовский порог $X_{\text{П}}^{*}$, при котором достигается минимум среднего риска. Подставив в выражение (11.5) формулы (11.6)–(11.9) и выполнив преобразования, получим выражение для среднего риска в виде

$$R = p_0\left[c_{00}\int_{-\infty}^{X_{\text{П}}} W\left(X\middle|H_0\right)dX - c_{10}\int_{\infty}^{X_{\text{П}}} W\left(X\middle|H_0\right)dX\right]+$$
$$+p_1\left[c_{01}\int_{-\infty}^{X_{\text{П}}} W\left(X\middle|H_1\right)dX - c_{11}\int_{\infty}^{X_{\text{П}}} W\left(X\middle|H_1\right)dX\right]. \tag{11.10}$$

Для того чтобы найти экстремум среднего риска, нужно выполнить дифференцирование выражения (11.10) по переменному

верхнему пределу и результат приравнять нулю. Выполнив эти действия, получим уравнение

$$\left.\frac{dR}{dX_{\text{п}}}\right|_{X_{\text{п}}=X_{\text{п}}^*} = p_0\left[c_{00}W\left(X_{\text{п}}^*\middle|H_0\right)-c_{10}W\left(X_{\text{п}}^*\middle|H_0\right)\right]+$$

$$+p_1\left[c_{01}W\left(X_{\text{п}}^*\middle|H_1\right)-c_{11}W\left(X_{\text{п}}^*\middle|H_1\right)\right]=0, \qquad (11.11)$$

из которого следует

$$\Lambda_{\text{п}} = \frac{W\left(X_{\text{п}}^*\middle|H_1\right)}{W\left(X_{\text{п}}^*\middle|H_0\right)} = \frac{p_0\left(c_{10}-c_{00}\right)}{p_1\left(c_{01}-c_{11}\right)}. \qquad (11.12)$$

Таким образом, правило принятия решения об обнаружении основывается на сравнении отношения правдоподобия или ФОП со значением порогового отношения правдоподобия $\Lambda_{\text{п}}$, которое определяется выражением (11.12):

$$\Lambda(X) = \frac{W\left(X\middle|H_1\right)}{W\left(X\middle|H_0\right)} \geq \Lambda_{\text{п}}, \quad \rightarrow H_1;$$

$$\Lambda(X) = \frac{W\left(X\middle|H_1\right)}{W\left(X\middle|H_0\right)} < \Lambda_{\text{п}}, \quad \rightarrow H_0. \qquad (11.13)$$

Для того чтобы определить значение порогового уровня $X_{\text{п}}^*$ сигнала при известном пороговом отношении правдоподобия $\Lambda_{\text{п}}$, следует решить уравнение (11.12) для порогового отношения правдоподобия $\Lambda_{\text{п}}$. Если отсутствуют сведения о платежной матрице или неизвестны априорные вероятности наличия сигнала от объекта, то используют частные случаи байесовского критерия.

В частности, если неизвестны априорные вероятности p_0 и p_1, то используют так называемый минимаксный критерий, в соответствии с которым пороговое значение $X_{\text{п}}^*$ обеспечивает минимум среднего риска для наименее предпочтительного сочетания значений p_0 и p_1.

Если неизвестна платежная матрица, но известны априорные вероятности, то платы за ошибочные решения принимают равными единице, т. е. $c_{10} = c_{01} = 1$, а платы за правильные решения — равными нулю, т. е. $c_{00} = c_{11} = 0$. В данном частном случае

$\Lambda_{\text{п}} = p_0 / p_1$ и байесовский критерий называют критерием максимума апостериорной вероятности. При этом решение выносится в пользу гипотезы H_i, для которой больше апостериорная плотность распределения:

$$W\left(H_i \middle| X\right) = \frac{p_i W\left(X \middle| H_i\right)}{p_0 W\left(X \middle| H_0\right) + p_1 W\left(X \middle| H_1\right)}, \quad i = \overline{0,1}. \qquad (11.14)$$

Если неизвестны априорные плотности и платежная матрица, то используют критерий максимального правдоподобия. В этом случае в формуле (11.10) принимают $c_{10} = c_{01} = 1$, $c_{00} = c_{11} = 0$ и $p_0 = p_1 = 0{,}5$. Тогда пороговое отношение правдоподобия оказывается равным единице, $\Lambda_{\text{п}} = 1$. Этот критерий предполагает простое сравнение значений функций правдоподобия $W\left(X \middle| H_0\right)$ и $W\left(X \middle| H_1\right)$ для конкретной выборки реализаций.

Кроме приведенных критериев обнаружения, широкое применение находит критерий Неймана — Пирсона. Для этого критерия порог обнаружения $X_{\text{п}}$ выбирается из условия обеспечения требуемой вероятности ложной тревоги

$$P_{\text{л.т}} = P\left(H_1 \middle| H_0\right) \le \int_{X_{\text{п}}}^{\infty} W\left(X \middle| H_0\right) dX$$

и максимизации при этом условии вероятности правильного обнаружения

$$P_{\text{п.о}} = P\left(H_1 \middle| H_1\right) = \int_{X_{\text{п}}}^{\infty} W\left(X \middle| H_1\right) dX .$$

Для критерия Неймана — Пирсона, как и критерия максимального правдоподобия, не требуется знания априорных вероятностей и платежной матрицы.

Пример. Требуется в соответствии с байесовским алгоритмом провести обнаружение импульсного сигнала S известного вида, амплитуда которого равна S_M. Реализации, поступающие на вход порогового устройства (см. рис. 11.1), являются аддитивной смесью детерминированного импульсного сигнала S и помехи N, и представлены вектором выборочных значений:

$$X = S + N.$$

Будем считать, что помеха на выходе ЭС является нормальным стационарным случайным процессом с нулевым математическим ожиданием и СКО, равным σ_N, плотность распределения которой описывается функцией

$$W_N(N) = \frac{1}{\sigma_N \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{N^2}{2\sigma_N^2} \right). \qquad (11.15)$$

По условию сигнал, подлежащий обнаружению, является детерминированным с амплитудой S_M. Логично предположить, что решение об обнаружении принимается при достижении максимального значения сигнала. Тогда можно принять плотность распределения сигнала

$$W_S(S) = \delta(S - S_M). \qquad (11.16)$$

Определим функции правдоподобия реализации при отсутствии и наличии сигнала. Поскольку помеха и сигнал некоррелированы, то совместная плотность распределения составит

$$W(S, N) = W_S(S) W_N(N) = W_S(S) W_N(X - S) = W(X, S). \qquad (11.17)$$

Плотность распределения реализаций при наличии сигнала — функцию правдоподобия при справедливости альтернативы H_1, определим как маргинальную:

$$W(X|S) = W(X|H_1) = \int_{-\infty}^{\infty} W_S(S) W_N(X - S) dS =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(S - S_M) W_N(X - S) dS =$$

$$= W_N(X - S_M) = \frac{1}{\sigma_N \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(X - S_M)^2}{2\sigma_N^2} \right]. \qquad (11.18)$$

Очевидно, что при отсутствии сигнала в реализации, функция правдоподобия, соответствующая гипотезе H_0, имеет вид

$$W(X|S = 0) = W(X|H_0) = \frac{1}{\sigma_N \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{X^2}{2\sigma_N^2} \right). \qquad (11.19)$$

Подставив выражения (11.18) и (11.19) в формулу (11.12), получим уравнение для определения значения порогового уровня $X_{\text{п}}^*$ сигнала в следующем виде:

$$\frac{W\left(X_{\text{п}}^*|H_1\right)}{W\left(X_{\text{п}}^*|H_0\right)} = \exp\left[-\frac{\left(X_{\text{п}}^* - S_M\right)^2}{2\sigma_N^2} + \frac{X_{\text{п}}^{*2}}{2\sigma_N^2}\right] =$$

$$= \exp\left[\frac{2S_M X_{\text{п}}^* - S_M^2}{2\sigma_N^2}\right] = \Lambda_{\text{п}}. \qquad (11.20)$$

Прологарифмировав уравнение (11.20), получим решение

$$X_{\text{п}}^* = \frac{\sigma_N^2 \ln\Lambda_{\text{п}}}{S_M} + \frac{S_M}{2}. \qquad (11.21)$$

Для описания значений реализаций введем нормированные на СКО помехи величины $\xi = X/\sigma_N$. Тогда выражение для порогового значения нормированных реализаций байесовского обнаружителя определяется в виде

$$\xi_{\text{п}}^* = \frac{\ln\Lambda_{\text{п}}}{\mu} + \frac{\mu}{2}, \qquad (11.22)$$

где $\mu = S_M/\sigma_N$ — отношение сигнала к шуму на входе порогового устройства.

Функции правдоподобия (11.18) и (11.19) для нормированных выборочных значений реализаций имеют вид

$$W(\xi|H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(\xi-\mu)^2}{2}\right]; \qquad (11.23)$$

$$W(\xi|H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right). \qquad (11.24)$$

Тогда вероятности правильного обнаружения и ложной тревоги можно рассчитать по следующим формулам:

$$P_{\text{п.о}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\xi_{\text{п}}^*}^{\infty}\exp\left[-\frac{(\xi-\mu)^2}{2}\right]d\xi; \qquad (11.25)$$

$$P_{\text{л.т}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\xi_{\text{п}}^*}^{\infty} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2} \right) d\xi. \qquad (11.26)$$

Из полученных формул следует, что вероятности правильного обнаружения и ложной тревоги зависят от отношения сигнала к шуму, которое достигается на выходе ЭС. Выясним теперь, какими характеристиками должна обладать ЭС для достижения максимального значения данного отношения.

11.3.2. Байесовский алгоритм обнаружения при априори неизвестных значениях параметров сигнала

В рассмотренной выше задаче предполагалось, что проводится обнаружение детерминированного сигнала с известными параметрами. Но на практике такая задача встречается крайне редко, и, как правило, значения каких-либо параметров сигнала являются априори неизвестными.

Предположим, что обнаруживаемый сигнал описывается детерминированной функцией времени $s\left(t; \vec{\theta}_0\right)$, которая зависит от векторного параметра $\vec{\theta} = \left(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_k\right)$, определенного в области возможных значений параметров $\vec{\theta} \in \Theta$ с известной априорной плотностью распределения $W_{pr}\left(\vec{\theta}\right)$. На интервале времени $[0; T]$ регистрируется реализация $x(t)$, которая представляет собой аддитивную комбинацию сигнала и гауссовой помехи $n(t)$:

$$x(t) = s\left(t; \vec{\theta}_0\right) + n(t). \qquad (11.27)$$

Помеха $n(t)$ имеет нулевое математическое ожидание $m_n = \left\langle n(t) \right\rangle = 0$ и корреляционную функцию $Kr_n\left(t_1, t_2\right) = \left\langle n\left(t_1\right) n\left(t_2\right) \right\rangle$. При таких условиях байесовское правило обнаружения формулируется следующим образом:

$$\begin{aligned} &\Lambda = \Lambda\left[X(t)\right] \geq \Lambda_{\text{п}}, \quad \rightarrow H_1; \\ &\Lambda = \Lambda\left[X(t)\right] < \Lambda_{\text{п}}, \quad \rightarrow H_0, \end{aligned} \qquad (11.28)$$

где $\Lambda_{\text{п}}$ — пороговое значение ФОП, определяемое формулой (11.12); Λ — усредненный ФОП.

Усредненный ФОП определяется выражением

$$\Lambda = \Lambda\left[X(t)\right] = \int_{\Theta} \Lambda(\vec{\theta}) W_{pr}(\vec{\theta}) d\vec{\theta}, \tag{11.29}$$

из которого следует, что усреднение ФОП $\Lambda(\vec{\theta}) = \Lambda\left[x(t)\middle|\vec{\theta}\right]$ выполняется по области Θ значений векторного параметра ФОП.

В математической статистике доказано, что для нормальной статистики реализаций существует оптимальный алгоритм формирования ФОП, который определяется следующими соотношениями:

$$\Lambda(\vec{\theta}) = \Lambda\left[x(t)\middle|\vec{\theta}\right] = \exp\left[M(\vec{\theta})\right]; \tag{11.30}$$

$$\ln\left[\Lambda(\vec{\theta})\right] = M(\vec{\theta}) =$$

$$= \int_0^T x(t) H_{\text{опт}}(t; \vec{\theta}) dt - \frac{1}{2}\int_0^T s(t; \vec{\theta}) H_{\text{опт}}(t; \vec{\theta}) dt =$$

$$= M_0(\vec{\theta}) - \frac{1}{2}\hat{Q}(\vec{\theta}), \tag{11.31}$$

где $H_{\text{опт}}(t; \vec{\theta})$ — аппаратная функция (импульсный отклик) оптимального фильтра, которая находится как решение интегрального уравнения

$$\int_0^T Kr_n(t, \xi) H_{\text{опт}}(\xi; \vec{\theta}) d\xi = s(t; \vec{\theta}). \tag{11.32}$$

В целом байесовский алгоритм обнаружения сигнала описывается выражениями (11.28)–(11.32). Для того чтобы провести анализ этого алгоритма, упростим задачу: во-первых, пусть сигнал зависит от одного случайного измеряемого параметра θ; во-вторых, примем допущение, что значения этого параметра имеют равномерное распределение в пределах априорного интервала, т. е. $W_{pr}(\theta) = \text{const}$, $\theta \in \Theta$; в-третьих, будем считать, что помеха является стационарным случайным процессом, т. е. корреляционная функция определяется как $Kr_n(t_1, t_2) = Kr_n(t_1 - t_2)$.

Логарифмическая функция является монотонной, поэтому для принятых допущений алгоритм байесовского обнаружения сигнала описывается следующими выражениями:

$$\ln\left[\Lambda(\theta)\right] = M(\theta) = M_0(\theta) - \frac{1}{2}\hat{Q}(\theta) \geq \ln\Lambda_{\text{п}}, \ \rightarrow H_1; \qquad (11.33)$$

$$\ln\left[\Lambda(\theta)\right] = M(\theta) = M_0(\theta) - \frac{1}{2}\hat{Q}(\theta) < \ln\Lambda_{\text{п}}, \ \rightarrow H_0; \qquad (11.34)$$

$$M_0(\theta) = \int_0^T x(t)H_{\text{опт}}(t;\theta)dt; \qquad (11.35)$$

$$\hat{Q}(\theta) = \int_0^T s(t;\theta)H_{\text{опт}}(t;\theta)dt; \qquad (11.36)$$

$$\int_0^T Kr_n(t-\xi)H_{\text{опт}}(\xi;\theta)d\xi = s(t;\theta). \qquad (11.37)$$

Устройство, в котором реализуется такой алгоритм, называется байесовским обнаружителем. Структурная схема этого устройства представлена на рис. 11.4.

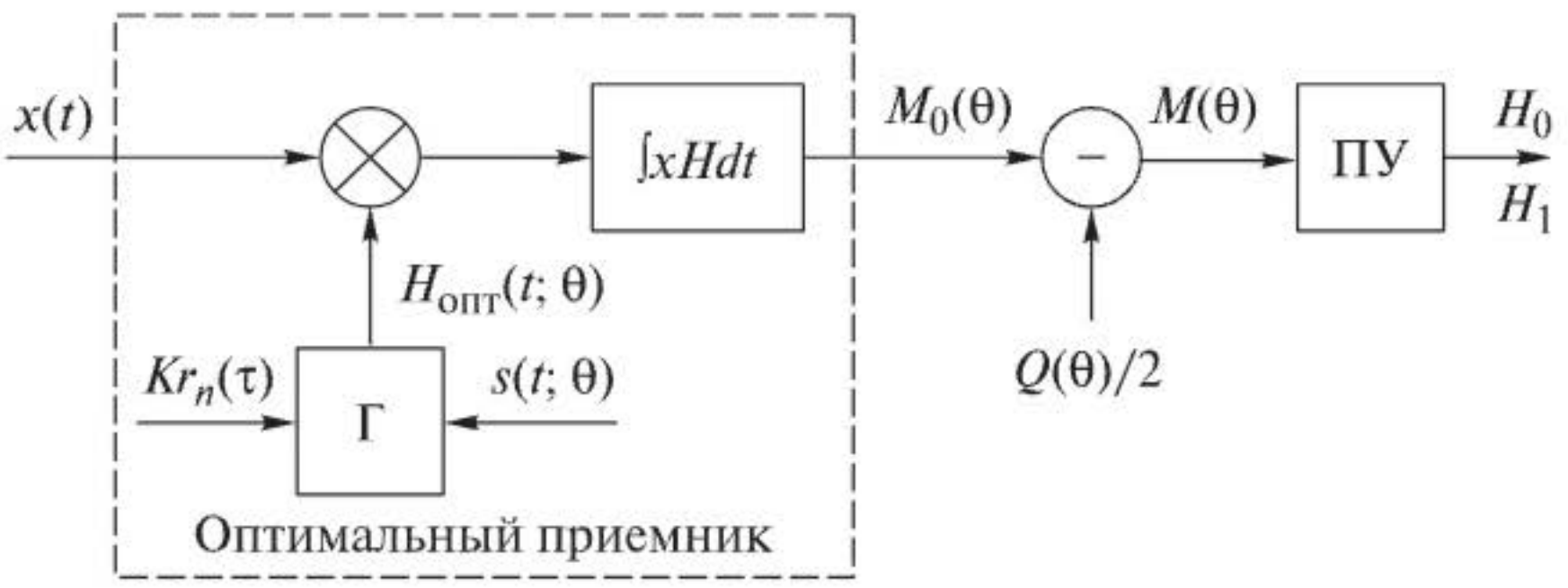


Рис. 11.4. Структурная схема байесовского обнаружителя

На вход обнаружителя поступает реализация $x(t)$, которая обрабатывается оптимальным приемником. На выходе оптимального приемника в соответствии с выражением (11.35) формируется сигнал $M_0(\theta)$. Обработка реализаций в оптимальном приемнике является существенной операцией, которая необходима для формирования логарифма ФОП $M(\theta)$. Для принятия решения об об-

наружении значение логарифма ФОП сравнивается с пороговым значением $\ln\Lambda_{\text{п}}$.

Процесс обработки в оптимальном приемнике заключается в умножении реализации $x(t)$ на аппаратную функцию оптимального фильтра $H_{\text{опт}}(t;\theta)$, которая формируется в гетеродине Г для известного вида сигнала $s(t;\theta)$ и корреляционной функции $Kr_n(\tau)$ помехи. Следует отметить, что для стационарной помехи аппаратная функция $H_{\text{опт}}(t;\theta)$ определяется как решение интегрального уравнения (11.37) типа свертки:

$$H_{\text{опт}}(t;\theta)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tilde{s}(\nu_t;\theta)}{\tilde{K}r_n(\nu_t)}\exp(i\cdot 2\pi\nu_t t)d\nu. \qquad (11.38)$$

Подынтегральное выражение в формуле (11.38) представляет собой передаточную функцию оптимального фильтра

$$\tilde{H}_{\text{опт}}(\nu_t;\theta)=\frac{\tilde{s}(\nu_t;\theta)}{\tilde{K}r_n(\nu_t)}. \qquad (11.39)$$

Поскольку параметр θ неизвестен, то в гетеродине перебираются значения этого сигнала из априорного интервала $\theta\in\Theta$ возможных значений. Покажем, что при равенстве значения параметра θ истинному значению θ_0 максимальное значение отношения сигнала к шуму достигается на выходе оптимального приемника.

Подставив соотношение (11.27) в выражение (11.35), получим сигнал на выходе оптимального приемника

$$M_0(\theta)=\int_0^T x(t)H_{\text{опт}}(t;\theta)dt=\hat{S}(\theta,\theta_0)+\hat{N}(\theta), \qquad (11.40)$$

где $\hat{S}(\theta,\theta_0)$ — сигнальная функция; $\hat{N}(\theta)$ — помеховые составляющие, которые определяются выражениями

$$\hat{S}(\theta,\theta_0)=\int_0^T s(t;\theta_0)H_{\text{опт}}(t;\theta)dt; \qquad (11.41)$$

$$\widehat{N}(\theta) = \int_0^T n(t) H_{\text{опт}}(t; \theta) dt. \qquad (11.42)$$

Проанализируем свойства сигнальной функции и помеховой составляющей. Поскольку помеха $n(t)$ нормальная, а операция, выполняемая над реализациями помехи, линейная, то $\widehat{N}(\theta)$ также является нормальным случайным процессом. Определим математическое ожидание, корреляционную функцию и дисперсию этого случайного процесса.

Математическое ожидание помехи $m_n = M\{n(t)\} = 0$, поэтому

$$M\left\{\widehat{N}(\theta)\right\} = M\left\{\int n(t) H_{\text{опт}}(t; \theta) dt\right\} = \int M\{n(t)\} H_{\text{опт}}(t; \theta) dt = 0.$$

Таким образом, математическое ожидание помеховой составляющей равно нулю.

В общем случае корреляционная функция помеховой составляющей определяется в следующем виде:

$$Kr_N(\theta_1, \theta_2) = M\left\{\widehat{N}(\theta_1)\widehat{N}(\theta_2)\right\} =$$

$$= M\left\{\int_0^T n(t_1) H_{\text{опт}}(t_1, \theta_1) dt_1 \int_0^T n(t_2) H_{\text{опт}}(t_2, \theta_2) dt_2\right\} =$$

$$= \int_0^T \int_0^T M\{n(t_1) n(t_2)\} H_{\text{опт}}(t_1, \theta_1) H_{\text{опт}}(t_2, \theta_2) dt_1 dt_2 =$$

$$= \int_0^T \int_0^T Kr_n(t_1, t_2) H_{\text{опт}}(t_1, \theta_1) H_{\text{опт}}(t_2, \theta_2) dt_1 dt_2. \qquad (11.43)$$

Учитывая интегральное уравнение (11.30), которое можно записать в виде

$$\int_0^T Kr_n(t_1, t_2) H_{\text{опт}}(t_2, \theta_1) dt_2 = s(t_1, \theta_1),$$

получаем

$$Kr_N(\theta_1, \theta_2) = \int_0^T s(t_1, \theta_1) H_{\text{опт}}(t_1, \theta_2) dt_1 = \hat{S}(\theta_1, \theta_2). \quad (11.44)$$

Следовательно, корреляционная функция помеховой составляющей равна сигнальной функции. Тогда дисперсия случайного процесса на выходе оптимального приемника

$$\sigma_N^2(\theta) = \left\langle \hat{N}^2(\theta) \right\rangle = Kr_N(\theta, \theta) = \hat{S}(\theta, \theta) =$$

$$= \int_0^T s(t, \theta) H_{\text{опт}}(t, \theta) dt \equiv \hat{Q}(\theta). \quad (11.45)$$

Таким образом, в отношении помеховой составляющей можно сделать следующие выводы:

- помеха на выходе оптимального фильтра является нормальным случайным процессом с нулевым средним и корреляционной функцией, по виду совпадающей с сигнальной функцией $Kr_N(\theta_1, \theta_2) = \hat{S}(\theta_1, \theta_2)$;
- дисперсия помеховой составляющей совпадает со вторым слагаемым логарифма ФОП и зависит от параметра θ, т. е. $\sigma_N^2(\theta) = \hat{Q}(\theta)$;
- помеховая составляющая на выходе оптимального фильтра в общем случае является нестационарным случайным процессом.

Обсудим свойства сигнальной функции. В соответствии с формулой (11.41) сигнальная функция $\hat{S}(\theta_0, \theta)$ представляет собой функцию взаимной корреляции полезного сигнала и аппаратной функции $H_{\text{опт}}(t; \theta)$ (сигналом гетеродина) при различных значениях параметра θ. Поскольку $\hat{S}(\theta_1, \theta_2)$ равна корреляционной функции помехи на выходе оптимального фильтра, то выполняется равенство $\hat{S}(\theta_1, \theta_2) = \hat{S}(\theta_2, \theta_1)$. При приеме сигнала с истинным значением θ_0 оцениваемого параметра сигнальная функция будет иметь вид $\hat{S}(\theta_0, \theta) = \hat{S}(\theta, \theta_0)$.

При $\theta = \theta_0$ сигнальная функция достигает максимального значения, равного $\hat{S}(\theta_0, \theta_0)$. Кроме того, как следует из выражения (11.45), максимальное значение сигнальной функции равно дисперсии помеховой составляющей, $\hat{S}(\theta_0, \theta_0) = \hat{Q}(\theta_0)$.

Следовательно, максимальное значение отношения сигнала к шуму на выходе оптимального приемника

$$\mu_{\max} = \mu(\theta_0) = \frac{\hat{S}(\theta_0,\theta_0)}{\sigma(\theta_0)} = \frac{\hat{Q}(\theta_0)}{\sqrt{\hat{Q}(\theta_0)}} = \sqrt{\hat{Q}(\theta_0)}. \qquad (11.46)$$

Таким образом, максимальное значение отношения сигнала к шуму достигается при истинном значении параметра θ_0 и равно значению СКО помехи на выходе оптимального фильтра. Отсюда следует важный вывод о возможности получения значения оценки параметра при достижении сигнальной функцией максимального значения. Именно такой подход используется при решении задачи измерения (оценки) случайных параметров сигнала.

Оцениваемые параметры разделяют на два типа: энергетические и неэнергетические. К энергетическим относят те параметры, от которых зависит отношение сигнала к шуму на выходе оптимального приемника. Неэнергетические параметры не влияют на значение отношения сигнала к шуму, т. е. $\mu_{\max} = \mu(\theta) = \mu(\theta_0)$. Поскольку для неэнергетических параметров выполняется условие $\hat{Q}(\theta) = \hat{Q}(\theta_0) = \mu^2_{\max}$, то дисперсия помеховой составляющей постоянна. Следовательно, в этом случае помеховая составляющая является стационарным случайным процессом, для которого корреляционная функция имеет вид $Kr_N(\theta_1, \theta_2) = \hat{S}(\theta_1 - \theta_2)$.

Для расчета вероятностей правильного обнаружения и ложной тревоги можно использовать выражения (11.22)–(11.26), учитывая, что в общем случае $\mu = \mu(\theta_0)$:

$$\xi^*_{\text{п}}(\theta_0) = \frac{\ln \Lambda_{\text{п}}}{\mu(\theta_0)} + \frac{\mu(\theta_0)}{2}; \qquad (11.47)$$

$$W(\xi|H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{[\xi - \mu(\theta_0)]^2}{2} \right]; \qquad (11.48)$$

$$W(\xi|H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2} \right); \qquad (11.49)$$

$$P_{\text{п.о}}(\theta_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\xi_{\text{п}}^*(\theta_0)}^{\infty} \exp\left[-\frac{\left[\xi - \mu(\theta_0)\right]^2}{2} \right] d\xi; \qquad (11.50)$$

$$P_{\text{л.т}}(\theta_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\xi_{\text{п}}^*(\theta_0)}^{\infty} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2} \right) d\xi. \qquad (11.51)$$

Очевидно, что вероятности правильного обнаружения и ложной тревоги не зависят от неэнергетических параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Левшин В.Л.* Пространственная фильтрация в оптических системах пеленгации. М.: Сов. Радио, 1971. 200 с.

2. *Лазарев Л.П.* Инфракрасные и световые приборы самонаведения и наведения летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1976.

3. *Борн М.*, *Вольф Э.* Основы оптики / пер. с англ. М.: Наука, 1970.

4. *Гудмен Дж.* Введение в фурье-оптику / пер. с англ. М.: Мир, 1970.

5. *Апенко М.И.*, *Дубовик А.С.* Прикладная оптика. 2-е изд., перераб. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982. (Физико-математическая библиотека инженера). 352 с.

6. *Ллойд Дж.* Системы тепловидения. М.: Мир, 1978.

7. *Колючкин В.Я.*, *Мосягин Г.М.* Тепловизионные приборы и системы: учеб. пособие. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. 57 с.

8. Автоматизация проектирования оптико-электронных приборов: учеб. пособие для вузов / Л.П. Лазарев, В.Я. Колючкин, А.Н. Метелкин и др.; под ред. Л.П. Лазарева. М.: Машиностроение, 1986. 216 с.

9. *Мосягин Г.М.*, *Колючкин В.Я.*, *Тимашова Л.Н.* Методы решения задач по теории оптических и оптико-электронных систем и приборов: учеб. пособие. В 3 ч. Ч. 3. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007. 88 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие научного редактора 5
Список сокращений 7
Введение 9

Ч I. Математические основы теории оптико-электронных приборов 24

1. Описание детерминированных сигналов 24
1.1. Функции, используемые при описании сигналов 24
1.1.1. Экспоненциальные функции 24
1.1.2. Прямоугольные функции 27
1.2. Ряд Фурье и его основные свойства 29
1.2.1. Вещественный ряд Фурье 29
1.2.2. Комплексный ряд Фурье 30
1.2.3. Свойства ряда Фурье 34
1.3. Интеграл Фурье и преобразования Фурье 36
1.3.1. Вывод формул преобразования Фурье 36
1.3.2. Свойства преобразования Фурье 39
1.4. Дельта-функция Дирака 46
1.4.1. Определение дельта-функции 47
1.4.2. Основные свойства дельта-функции Дирака 49
1.4.3. Фурье-образ дельта-функции Дирака 50
1.4.4. Преобразование Фурье от единичной функции 51
1.4.5. Фурье-образ двух дельта-функций, расположенных симметрично относительно начала координат 53
1.4.6. Изменение масштаба дельта-функции 54
1.4.7. Производные дельта-функции 54
1.4.8. Дополнительные свойства дельта-функции 55
1.4.9. Дельта-функция двух переменных 55
1.4.10. Преобразование Фурье от периодической функции 56
1.4.11. Функция единичного скачка (функция Хевисайда) 57
1.5. Гребенчатые функции 57
1.5.1. Гребенчатые функции одной переменной 57
1.5.2. Гребенчатые функции двух переменных 61
1.6. Интегральные операции свертки, ковариации и корреляции 63
1.6.1. Свертка функций. Преобразование Фурье от свертки, важные приложения свертки 63

1.6.2. Взаимная ковариация. Преобразование Фурье от функции взаимной ковариации 68
1.6.3. Корреляция. Преобразование Фурье от функции корреляции (взаимной корреляции) 70
1.6.4. Преобразование Фурье от произведения двух функций 72
1.6.5. Теорема Парсеваля 72
1.7. Дискретно-выборочное представление детерминированных сигналов с ограниченным спектром 73

2. Описание случайных сигналов 78
2.1. Элементы теории вероятностей 78
2.2. Элементы теории случайных процессов 98

3. Преобразование сигналов линейными системами 108
3.1. Преобразование детерминированных сигналов 108
3.1.1. Понятие линейной системы 108
3.1.2. Передаточная функция линейной инвариантной системы 111
3.2. Преобразование случайных сигналов линейными инвариантными системами 113
3.2.1. Корреляционный метод расчета 114
3.2.2. Спектральный метод расчета 115

Ч. II. Преобразование оптических сигналов элементами обобщенной схемы оптико-электронного прибора 118

4. Оптические волны как носители сигналов 118
4.1. Волновое уравнение 119
4.2. Плоские гармонические волны 120
4.2.1. Уравнение плоской волны 120
4.2.2. Частные случаи распространения плоской волны 124
4.2.3. Фурье-образ плоской волны 125
4.3. Сферические гармонические волны 127
4.3.1. Уравнение сферической волны 127
4.3.2. Сферическая волна в параксиальном приближении 129

5. Преобразование когерентных сигналов слоем пространства 132
5.1. Угловой спектр волны как суперпозиция плоских волн 132
5.1.1. Понятие углового спектра 132
5.1.2. Влияние препятствия на угловой спектр волны 133
5.1.3. Когерентная передаточная функция слоя пространства 135
5.1.4. Когерентная передаточная функция слоя пространства в приближении Френеля 141
5.1.5. Дифракция в приближении «тени» 142
5.2. Дифракционные интегралы 143
5.2.1. Дифракционный интеграл Рэлея — Зоммерфельда 143
5.2.2. Дифракционный интеграл Френеля 145
5.2.3. Дифракционный интеграл Фраунгофера 149

6. Преобразование сигналов оптической системой 150
6.1. Когерентные, частично когерентные и некогерентные оптические системы 150
6.1.1. Когерентное излучение и когерентная оптическая система 150
6.1.2. Частично когерентное излучение и частично когерентная оптическая система 152
6.1.3. Некогерентные сигналы и некогерентная оптическая система 155
6.2. Преобразование оптического сигнала тонкой линзой 156
6.2.1. Комплексные амплитудные коэффициенты пропускания и отражения тонких оптических элементов 156
6.2.2. Комплексный коэффициент пропускания тонкой линзы ... 158
6.2.3. Преобразование Фурье, выполняемое тонкой линзой 164
6.2.4. Формирование изображения тонким однолинзовым объективом при когерентном освещении 175
6.2.5. Формирование изображения однолинзовым объективом при некогерентном излучении объектов 183
6.3. Преобразование оптического сигнала реальной оптической системой 185
6.3.1. Обобщенная модель оптической изображающей системы ... 185
6.3.2. Формирование изображения реальной оптической системой при когерентном излучении 186
6.3.3. Формирование изображения реальной оптической системой при некогерентном излучении 196
6.3.4. Связь оптической передаточной функции с когерентной передаточной функцией 203
6.3.5. Связь волновых и геометрических аберраций 207
6.3.6. Влияние монохроматических аберраций на когерентную передаточную функцию 214
6.3.7. Влияние монохроматических аберраций на оптическую передаточную функцию 215
6.3.8. Влияние аподизации объектива на когерентную и оптическую передаточные функции 220
6.3.9. Аппроксимация функций рассеяния и передаточных функций оптических систем при некогерентном освещении 223
6.3.10. Преобразование случайного поля яркости оптической системой 229
6.4. Размерности физических величин, описывающих детерминированные и случайные оптические сигналы 239

7. Преобразование оптических сигналов модулятором анализатора изображения 241
7.1. Назначение и принцип действия модулятора анализатора изображения 241
7.2. Преобразование детерминированных сигналов модулятором анализатора изображения 244

7.2.1. Поток излучения и его пространственно-частотный спектр на выходе неподвижного модулятора анализатора изображений 245
7.2.2. Способы описания пространственной передаточной функции модулятора анализатора изображений 248
7.2.3. Поток излучения и его частотно-временной спектр на выходе подвижного модулятора анализатора изображения 254
7.2.4. Особенности описания сигнала и его пространственно-частотного спектра в угловых координатах 266
7.3. Преобразование случайных оптических сигналов модулятором анализатора изображения 269
7.3.1. Преобразование случайного поля облученности неподвижным модулятором анализатора изображения 270
7.3.2. Преобразование случайного поля облученности подвижным модулятором анализатора изображения 278
7.4. Размерности физических величин 285

8. Преобразование оптических сигналов приемниками излучения 288
8.1. Общие сведения о приемниках излучения 288
8.1.1. Назначение приемников излучения 288
8.1.2. Математическая модель одноэлементного приемника излучения 290
8.2. Преобразование одноэлементным приемником излучения сигналов на выходе подвижного модулятора анализатора изображения 293
8.2.1. Преобразование одноэлементным приемником излучения детерминированных сигналов 293
8.2.2. Преобразование одноэлементным приемником излучения случайных сигналов 298
8.3. Преобразование сигналов многоэлементными приемниками излучения 300
8.3.1. Общие сведения о многоэлементных приемниках излучения и постановка задачи описания преобразования сигналов приемниками излучения 300
8.3.2. Описание преобразования оптических сигналов матричным приемником излучения 302
8.3.3. Описание преобразования оптических сигналов линейкой приемников излучения 307

9. Преобразование сигналов электронной системой 314
9.1. Назначение и методы обработки сигналов в электронной системе оптико-электронных приборов 314
9.2. Преобразование детерминированных сигналов линейной электронной системой 315
9.3. Преобразование случайных сигналов линейной электронной системой 316
9.4. Преобразование детерминированных сигналов нелинейной электронной системой 318

10. Преобразование сигналов видеоконтрольными устройствами 319
10.1. Назначение и примеры видеоконтрольных устройств 319
10.2. Постановка задачи модельного описания видеоконтрольного устройства 320
10.3. Математическое описание преобразования сигналов видеоконтрольным устройством 320

11. Элементы теории обнаружения сигналов 324
11.1. Оценка эффективности оптико-электронных приборов 324
11.2. Постановка задачи обнаружения сигналов 325
11.3. Байесовский алгоритм обнаружения сигнала 327
11.3.1. Классический байесовский алгоритм обнаружения 328
11.3.2. Байесовский алгоритм обнаружения при априори неизвестных значениях параметров сигнала 335
Литература 343

Учебное издание

Мосягин Геннадий Михайлович

Теория оптико-электронных систем

Редактор *Л.Т. Мартыненко*
Художник *Э.Ш. Мурадова*
Корректор *О.Ю. Соколова*
Компьютерная графика *Т.Ю. Кутузовой*
Компьютерная верстка *Т.В. Батраковой*

Оригинал-макет подготовлен
в Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана.

В оформлении использованы шрифты
Студии Артемия Лебедева.

Подписано в печать 23.12.2019. Формат 60×90/16.
Усл. печ. л. 22,0. Тираж 500 экз.

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана.
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.
press@bmstu.ru
www.baumanpress.ru

Отпечатано в типографии МГТУ им. Н.Э. Баумана.
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.
baumanprint@gmail.com

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МГТУ им. Н.Э. БАУМАНА

В Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана

выпущена монография

В.М. Ачильдиева, Ю.К. Грузевича, В.А. Солдатенкова

«Информационные измерительные и оптико-электронные системы на основе микро- и наномеханических датчиков угловой скорости и линейного ускорения»

Рассмотрены основные физические принципы работы и особенности функционирования гироскопов различных видов. Исследованы микромеханические гироскопы и акселерометры с рамочной и консольной конструкциями чувствительного элемента с емкостными и автоэлектронными преобразователями и наноэлектромеханические измерительные преобразователи для измерения тепловых полей малой интенсивности в инфракрасной и терагерцовой областях спектра. Предложены способы изготовления и локальной инициализации вискера по переменному току после формирования механической структуры чувствительного элемента. Описан синтез регуляторов методом модального управления и идентификации коэффициентов чувствительности к температуре и напряжению питания. Приведены примеры схем построения, моделирования и испытаний систем управления и навигации летательных микроаппаратов на основе бесплатформенных инерциальных блоков, различных информационно-измерительных средств с использованием наклономеров, оптико-электронных устройств наблюдения с определением координат удаленных объектов и нашлемных систем ориентации.

Для студентов, аспирантов, инженеров и научных работников.

Год издания 2016
Тип издания монография
Объем 264 стр. / 16,5 п.л.
Формат 60x90/16
ISBN 978-5-7038-4351-2

Информацию о других книгах можно получить на сайте Издательства МГТУ им. Н.Э. Баумана: bmstu.press
По вопросам приобретения обращаться в отдел реализации Издательства:
8 (499) 263-60-45, press@baumanpress.ru

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МГТУ им. Н.Э. БАУМАНА

В Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана

выпущено учебное пособие
Э.Н. Камышной, В.В. Маркелова, В.А. Соловьева

«Конструкторско-технологические расчеты электронной аппаратуры»

Рассмотрены методологии различных конструкторско-технологических расчетов электронной аппаратуры и их программная реализация. Приведены методики и алгоритмы компоновочного расчета, расчетов теплового режима блоков электронной аппаратуры, надежности, параметров печатного монтажа, а также на механические воздействия.

Для студентов, осуществляющих расчеты по курсовому и дипломному проектированию.

Год издания 2014
Тип издания учебное пособие
Объем 166 стр. / 10,5 п.л.
Формат 60x90/16
ISBN 978-5-7038-3943-0

Информацию о других книгах можно получить на сайте Издательства МГТУ им. Н.Э. Баумана:
bmstu.press
По вопросам приобретения обращаться в отдел реализации Издательства:
8 (499) 263-60-45
press@baumanpress.ru

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МГТУ им. Н.Э. БАУМАНА
BAUMANPRESS

В Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана
выпущена монография В.Е. Карасика, В.М. Орлова
«Локационные лазерные системы видения»

Год издания 2013
Тип издания монография
Объем 480 стр. / 30 п.л.
Формат 60x90/16
ISBN 978-5-7038-3667-5

Изложены общая теория и технические пути построения изображающих оптико-электронных систем нового типа — локационных лазерных систем видения, предназначенных для наблюдения дистанционных объектов при недостаточной естественной освещенности или в ночное время. Представлены современные методы анализа процесса формирования изображения в рассеивающих и случайно-неоднородных средах, основанные на синтезе теорий линейных систем и переноса излучения. Приведены оригинальные методики расчета основных параметров систем активного видения и характеристик воспроизводимого на экране монитора изображения, учитывающие специфические свойства зрительного анализатора оператора. Рассмотрен специальный класс локационных лазерных систем, предназначенных для обнаружения световозвращателей. Исследована возможность формирования изображений активными системами видения в сильно рассеивающих средах. Описаны экспериментальные образцы систем видения, обсуждены результаты экспериментальных исследований и выработаны рекомендации на проведение проектирования. Часть материалов монографии соответствует курсу лекций, который авторы читают в МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Для научных и инженерно-технических работников, специализирующихся в областях лазерной локации и оптико-электронных изображающих систем, а также для студентов технических университетов, обучающихся по направлению «Оптотехника».

Информацию о других книгах можно получить на сайте Издательства МГТУ им. Н.Э. Баумана: bmstu.press
По вопросам приобретения обращаться в отдел реализации Издательства:
8 (499) 263-60-45, press@baumanpress.ru

BAUMANPRESS
ИЗДАТЕЛЬСТВО
МГТУ им. Н.Э. БАУМАНА

В Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана
выпущено 8-е издание учебника
«Теория механизмов и механика машин»
под редакцией Г.А. Тимофеева

Год издания 2016
Тип издания учебник
Объем 568 стр. / 46,15 п.л.
Формат 70x100/16
ISBN 978-5-7038-4151-8

В настоящем, восьмом, переработанном и дополненном издании учебника изложены основы теории механизмов и механики машин, рассмотрены свойства отдельных типов механизмов, широко применяемых в самых различных конструкциях машин, приборов и устройств; приведены и проанализированы задачи совершенствования современной техники, создания высокопроизводительных машин и систем, освобождающих человека от трудоемких процессов; с учетом упругости звеньев, трения и изнашивания кинематических пар, виброактивность и виброзащита; методы проектирования схем основных видов механизмов, управление движением системы механизмов; основы автоматизированного проектирования механизмов машин.

Учебник отражает современные научные и практические знания, используемые при решении задач преобразования и передачи механической энергии, при проектировании и создании самых различных видов технических средств.

Для студентов машиностроительных вузов и технических университетов.

Информацию о других книгах можно получить на сайте Издательства МГТУ им. Н.Э. Баумана:
bmstu.press
По вопросам приобретения обращаться в отдел реализации Издательства:
8 (499) 263-60-45
press@baumanpress.ru